



UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE COMPOSTELA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES
DEPARTAMENTO DE FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS
ECONOMICO
PROGRAMA DE DOCTORADO EN ECONOMIA

**Análisis de la Interdependencia de Mercados
Financieros con Cópulas. Implicaciones para la
Valoración del Riesgo**

Autor:

Mikel Ugando Peñate

Director de tesis:

Prof. Dr. Juan Carlos Reboredo Nogueira

Santiago de Compostela

2013



UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE
COMPOSTELA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN ECONOMIA

MIKEL UGANDO PEÑATE

**Análisis de la Interdependencia de Mercados
Financieros con Cópulas. Implicaciones para la
Valoración del Riesgo**



Tesis presentada al programa de Doctorado en Economía de la
Universidad de Santiago de Compostela como requisito para la
obtención del Título de Doctor en Economía.

Director de tesis:

Prof. Dr. Juan Carlos Reboredo Nogueira

25 de Febrero de 2013



D. **Juan Carlos Reboredo Nogueira**, Profesor Titular del Departamento de Fundamentos da Análise Económica de la Universidad de Santiago de Compostela, en condición de Director del doctorando

AUTORIZA la presentación de la memoria adjunta, titulada “Análisis de la Interdependencia de Mercados Financieros con Cópulas. Implicaciones para la Valoración del Riesgo” realizada por D. **Mikel Ugando Peñate** para optar al grado de Doctor en Economía.

Y para que así conste, expido la presente autorización en Santiago de Compostela a 26 de Febrero de 2013.

Juan Carlos Reboredo Nogueira



Agradecimientos

Quiero expresar mi eterno agradecimiento al Dr. Juan Carlos Reboredo Nogueira, director de esta tesis, por el tiempo dedicado y su comprensión, su excelente trato personal y válidas sugerencias en el desarrollo de este trabajo. Su orientación y dirección han sido decisivas en la culminación de esta tesis.

A mi esposa, Loli, por su apoyo y cuidado incondicional en los momentos más duros de mi vida, por sus lágrimas y amor. A mi madre, por sus buenos consejos, incentivos, su fe y confianza a pesar de estar tan lejos.

Al Departamento de Cooperación Universitaria y Científica de la AECID por proporcionarme la financiación para el desarrollo de este trabajo, en especial a Rosa María y Javier, por sus consejos y su buen trato.

A dos personas amigas maravillosas, María Candean y Pepe por su cariño, preocupación y su apoyo en todos los momentos difíciles.

A mi amigo Juergen Heine por sus valores y eterna amistad.

A mis compañeros de trabajo Lora, Melba, Mapy y Senia, por su motivación y conocimientos brindados.

Por último, a las tías Vita, Encarna y tío Manolo por su cariño y apoyo en la etapa final.

A todas estas personas muchísimas gracias y mis mejores deseos de que tengan una vida fructífera, llena de amor, salud y confianza.



Índice general

Introducción.....	1
Capítulo 1. El riesgo en los mercados financieros.....	4
1.1 Introducción.....	4
1.2 El modelo de Markowitz	6
1.3 El modelo Capital Asset Pricing Model: CAPM.....	8
1.4 Volatilidad implícita y volatilidad realizada.....	10
1.5 Dinámica temporal de la volatilidad.....	12
1.6 El valor en riesgo (<i>Value at risk</i> , VaR)	13
1.6.1 Estimación paramétrica del VaR	15
1.6.2 Método de suavizado exponencial (RiskMetrics®).....	16
1.6.3 Método de simulación histórica.....	16
1.6.4 Método de simulación de Monte Carlo.....	18
1.6.5 El CAViaR.....	119
1.7 Contraste del modelo VaR	119
1.7.1 Test de Kupiec	119
1.7.2 Test de Christoffersen.....	20
1.7.3 Test mixto de Kupiec	21
1.7.4 Test de Engle y Manganelli	22
1.7.5 La función de pérdida	22
1.7.6 Stress Testing	23
1.8 Expected Shortfall.....	24
Capítulo 2. Teoría del valor extremo.....	26
2.1 Introducción.....	26
2.2 Método de máximo por bloques.....	27

2.3 Método de picos sobre el umbral.....	31
2.4 Medidas de riesgo: VaR y ES.....	34
Capítulo 3. Cópulas.....	37
3.1 Introducción.....	37
3.2 Cópulas.....	38
3.3 Tipos de funciones cópulas.....	40
3.3.1 Familias de cópulas elípticas.....	41
3.3.2 Familia de cópulas arquimedianas.....	43
3.4 Correlación, concordancia y dependencia de las colas.....	45
3.4.1 El coeficiente de correlación de Pearson.....	45
3.4.2 Medidas de concordancia.....	47
3.4.3 Dependencia de las colas de la distribución.....	449
3.5 Métodos de estimación del parámetro de dependencia.....	51
3.6 Contrastes de bondad de ajuste.....	53
Capítulo 4. Las fluctuaciones en el precio de los alimentos y del dólar americano	58
4.1 Introducción.....	58
4.2 Metodología	62
4.3 Datos	66
4.4 Resultados empíricos.....	70
4.4.1 Resultados de modelos marginales.	70
4.4.2 Estimación de la función cópula para la dependencia.....	74
4.5 Discusión e implicaciones para el análisis de riesgo.....	79
4.6 Conclusiones.....	85
Capítulo 5. Riesgo a la baja en el mercado de CO ₂ de la UE y los mercados de combustibles fósiles	86
5.1 Introducción.....	86
5.2 El Sistema de Comercio de Emisiones de la Unión Europea	89

5.3 Metodología	90
5.3.1 GARCH.....	92
5.3.2 Teoría de valores extremos.	93
5.3.3 Cópulas.....	95
5.4 Datos	99
5.5 Resultados empíricos.....	102
5.5.1 Resultados para modelos GARCH	102
5.5.2 Resultados de la EVT	104
5.5.3 Resultados de modelos Cópulas.....	110
5.5.4 Resultados para el VaR y ES.....	111
5.6 Conclusiones.	121
Capítulo 6. Paridad cubierta de interés: Un análisis con valores extremos y cópulas .	123
6.1 Introducción.....	123
6.2 Metodología	126
6.2.1 Teoría de los valores extremos	126
6.2.2 Cópulas.....	128
6.3 Datos	130
6.4. Resultados empíricos.....	132
6.4.1 Resultados para la distribución GEV	132
6.4.2 Resultados para los modelos cópulas.....	134
6.5 Conclusiones	138
Bibliografía.....	140



Índice de figuras

1.1. Combinaciones posibles en la Frontera Eficiente.....	7
1.2. Capital Asset Pricing Model.	9
1.3 VaR de una variable aleatoria normal estándar	14
2.1. Distribuciones estándar de valores extremos	29
4.1. Movimientos de precios de los alimentos y USD entre el 9 de enero 1998 y el 12 de octubre de 2012	68
4.2. Estimación no paramétrica de la densidad.....	76
5.1. Precios para los EUA, Brent y Gas	99
5.2. Rentabilidades para los EUA, Brent y Gas.....	100
5.3. Resultados del modelo POT para los EUA	105
5.4. Resultados del modelo POT para Brent	106
5.5. Resultados del modelo POT para Gas	107
5.6 Estimador de Hill frente a los estadísticos de orden superior n (nivel de probabilidad $p=0,99$).....	109
5.7. Cópula empírica para los EUA y Brent y Gas	111
5.8. Estimación e Intervalo de confianza para VaR y ES basado en EVT al 99%	115
5.9 Sensibilidad de la estimación VaR 99% a los cambios en el umbral u	117
6.1 Diferenciales de tipos de interés y prima forward para vencimientos de 1, 3, 6 y 12 meses.....	131
6.2. Densidades empíricas no paramétricas para $(R_{ex}^+ - R_{ir}^+)$ y $(R_{ex}^- - R_{ir}^-)$ considerando los vencimientos a plazo de 1, 3, 6 y 12 meses	134



Índice de tablas

Tabla 4.1: Especificaciones de funciones cópula.....	65
Tabla 4.2: Estadística descriptiva.....	69
Tabla 4.3: Matriz de correlación de Pearson.....	69
Tabla 4.4: Copula empírica para el dólar y los alimentos.	71
Tabla 4.5: Estimación de la distribución marginal para alimentos y el dólar.	73
Tabla 4.6: Pruebas de bondad de ajuste para las distribuciones marginales.....	74
Tabla 4.7: Parámetros estimados para los modelos cópula	77
Tabla 4.8: Efectividad reducción del Riesgo.....	81
Tabla 4.9: Evaluación del riesgo a la baja para alimentos y dólar.....	84
Tabla 5.1: Especificaciones de funciones cópula.....	97
Table 5.2: Estadística descriptiva.....	101
Table 5.3: Distribuciones marginales de los EUA, Brent y Gas.	103
Table 5.4: Bondad de ajuste para los modelos marginales.	104
Table 5.5: Resultados EVT para los retornos de EUA, Brent y Gas.....	110
Table 5.6: Estimación de modelos cópulas.....	113
Table 5.7: Resultados para VaR y ES utilizando el modelo ARMA-t-EGARCH	114
Table 5.8: Resultados para el VaR y ES utilizando la EVT	114
Table 5.9: Resultados de intervalos de confianza de VaR y ES basado en EVT para 95%, 99%	116
Table 5.10: Evaluación de riesgo en carteras de combustibles fósiles y carteras compuestas por los EUA y combustible fósiles	120
Table 5.11: Eficacia de reducción del riesgo de carteras de los EUA.....	121
Table 6.1: Parámetros estimados para los modelos distribución GEV.....	133
Table 6.2: Parámetros estimados para cópulas de valor extremo.	137



Introducción

Esta tesis doctoral se centra en el estudio de la interdependencia entre diversos mercados financieros utilizando cópulas y la teoría del valor extremo, proporcionando así información de la dependencia promedio y de la dependencia de cola superior e inferior (movimientos conjuntos extremos), información que es crucial para la evaluación del riesgo de una inversión. Además, se analizan las implicaciones del uso de esta metodología para la valoración y cuantificación de los riesgos de mercado, la diversificación de carteras, las estrategias de cobertura y la protección de las inversiones contra el riesgo a la baja para diferentes tipos de activos que se negocian en los mercados financieros.

Para dar cumplimiento a estos objetivos, la tesis se estructura en 6 capítulos. En los capítulos 1, 2 y 3 se revisan cuestiones metodológicas, describiendo los principales métodos y pruebas relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. En los capítulos 4, 5 y 6 se presentan los desarrollos y las aportaciones de la tesis. Estos capítulos han sido concebidos como tres artículos de investigación que tienen como hilo conductor una base metodológica común.

En el capítulo 4 se analiza la relación entre el dólar americano (USD) y los precios de los principales productos alimenticios (maíz, soja, trigo y arroz) utilizando funciones cópula. Así, se utilizan una serie de especificaciones para las funciones cópula que tienen estructuras de dependencia condicional diferentes y parámetros de dependencia que son variables en el tiempo. Los resultados empíricos obtenidos con datos semanales desde enero de 1998 hasta octubre de 2012 proporcionan dos resultados. En primer lugar, existe evidencia de dependencia positiva y débil entre el USD y el precio de los alimentos, no existiendo dependencia extrema de los mercados de cambio con los mercados del

maíz, trigo y arroz, lo cual confirma que los picos alcistas en los precios de estos alimentos no fueron causados por la depreciación extrema del dólar que se ha observado en años recientes. Sin embargo, para la soja se encuentra evidencia de dependencia media positiva y de dependencia de cola asimétrica, con dependencia positiva de cola superior. Este hecho confirma que la depreciación del dólar ha contribuido a generar picos alcistas en los precios de la soja. En segundo lugar, se examinaron las implicaciones de la relación entre el USD con los precios de los alimentos para la gestión de riesgos de la inversión en los mercados de alimentos. Los resultados empíricos obtenidos indican que el USD se puede utilizar en el diseño y gestión de riesgos de carteras compuestas por alimentos, dado que el riesgo total se reduce y se observan mejores resultados en términos de la función de pérdida del inversor frente a carteras compuestas sólo de alimentos.

El capítulo 5 tiene como objetivo medir la volatilidad y exposición al riesgo a la baja en el mercado de derechos de emisión de CO_2 de la UE y en los mercados de combustibles fósiles. Para ello, se utilizan modelos GARCH, la teoría de los valores extremos y las funciones cópula, evaluándose el riesgo a la baja a través de medidas como el valor en riesgo y la pérdida esperada condicionada. Utilizando datos diarios para el período entre enero de 1998 hasta octubre de 2012, se obtienen dos resultados. En primer lugar, el mercado de derechos de emisión de CO_2 tiene más riesgos a la baja que los mercados de crudo, pero menos que el mercado de gas natural. Los modelos cópula proporcionan evidencia de dependencia positiva media e independencia extrema entre el mercado de emisiones de CO_2 y el mercado del crudo, mientras que existe independencia media y extrema entre el mercado de emisiones de CO_2 y el mercado de gas natural. En segundo lugar, las implicaciones de estos resultados para gestión de carteras que incluyan derechos de emisión y combustibles fósiles indican que existen ganancias en términos de riesgos a la baja. De este modo, se constata que el mercado de derechos de emisión de CO_2 es un mercado atractivo para los inversores en términos de gestión de riesgos.

En el capítulo 6 se estudia la hipótesis de la paridad cubierta de intereses (CIP) utilizando la teoría de los valores extremos y las funciones cópula. Utilizando datos diarios desde enero de 2000 hasta junio de 2012 para los tipos de interés en EE.UU. y Gran Bretaña y los tipos de cambio spot y forward con

vencimientos de 1, 3, 6 y 12 meses, la evidencia empírica obtenida proporciona tres conclusiones. En primer lugar, existe una fuerte dependencia de cola entre los mercados de tipo de cambio y tipos de interés. En segundo lugar, se evidencia la existencia de periodos muy cortos de alta turbulencia en los que existen desviaciones de la CIP, las cuales podrían implicar la posibilidad de un arbitraje, si bien la prima de riesgo podría justificar este hecho. En tercer lugar, existe evidencia de cumplimiento simétrico de la CIP dado que la dependencia de cola superior e inferior es similar.

Los resultados obtenidos en los capítulos 4, 5 y 6 han sido posibles mediante la utilización de diferentes programas informáticos, destacando la utilización del S-PLUS Versión 8.0.4 para Microsoft Windows 2007.



Capítulo 1

El riesgo en los mercados financieros

1.1 Introducción

Valorar y gestionar los riesgos financieros de manera adecuada y oportuna es primordial, ya que de esas valoraciones depende en gran medida la estabilidad de los mercados financieros. Así, la gestión del riesgo se ha convertido en una disciplina importante dentro del campo de las finanzas, su estudio y desarrollo dentro de diversos ámbitos de la econometría financiera reviste vital importancia en la actualidad. El principal objetivo de la gestión del riesgo es medir y analizar las causas y consecuencias de sucesos negativos para los intereses del inversor. Esta definición depende a su vez de la definición de suceso negativo, y del perfil que tenga el inversor.

El concepto de riesgo tiene diversas acepciones las cuales no permiten a los analistas financieros, inversores y académicos progresar en la misma dirección para resolver problemas financieros similares. En general, los estudios se han concentrando más en el análisis de la incertidumbre que en el riesgo, quizás guiados por la creencia común (Knight, 1921) de que ambos términos son intercambiables. Así, la incertidumbre está asociada a la ocurrencia de un suceso al que resulta imposible asignar una probabilidad, mientras que el riesgo se asocia con aquellas situaciones de incerteza a las que si podemos asignar una medida de probabilidad. Jorion (1997) caracteriza el riesgo financiero como la volatilidad o dispersión de los flujos financieros inesperados o, en términos

generales, como la incertidumbre que se tiene sobre resultados futuros. Según Artzner et al. (1999), la definición de riesgo financiero está relacionada con la variabilidad del valor futuro de una posición debido a cambios en el mercado o a eventos inesperados. Es decir, los riesgos financieros son diversos y están relacionados con las pérdidas que se puedan generar en los mercados.

Otra distinción importante entre estos conceptos viene dada por el significado negativo del suceso que conlleva el riesgo. La incertidumbre no conlleva necesariamente un resultado negativo. Por el contrario, el riesgo implica una probabilidad de un resultado negativo en el universo de posibles resultados. Ambos conceptos sin embargo se caracterizan por la presencia de aleatoriedad y por lo tanto pueden ser atribuidos a una variable aleatoria. De esta forma, las anteriores definiciones de riesgo e incertidumbre se pueden abordar con la teoría de la probabilidad.

En este contexto la incertidumbre es intrínseca a la definición de variable aleatoria y es normalmente descrita usualmente por medio de la varianza. El riesgo sin embargo tiene asociadas más connotaciones que no capturadas por la varianza. Consideremos por ejemplo la predicción del peso de una persona adulta a los 20 años de edad. No hay duda de que la incertidumbre estadística se mide mediante la varianza, aunque en absoluto es informativa sobre el riesgo. El riesgo en esta situación vendrá dado por valores muy bajos o excepcionalmente altos. En este ejemplo las observaciones extremas pueden derivar en diferentes enfermedades como la anorexia o la obesidad.

Este ejemplo tan simple motiva la definición de riesgo como un evento que ocurre en las colas de la distribución de la variable aleatoria cuya caracterización requiere necesariamente del conocimiento de la función de probabilidad. Normalmente, el riesgo se reduce a medir la varianza de la variable aleatoria que describe el comportamiento del suceso aleatorio. Esto es verdad sólo si la función de probabilidad es conocida y la única incógnita es la varianza. Consideremos una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ es desconocida pero σ es conocida. El conocimiento de σ no es suficiente para conocer ni la incertidumbre ni el riesgo. La función de probabilidad no es conocida, sino un conjunto de funciones de probabilidad. Este ejemplo refleja la ambigüedad de conocer sólo la varianza. En el caso particular de series financieras se suele asumir que el valor esperado de los rendimientos es 0, y

entonces tiene sentido pensar en la volatilidad (varianza) como medida del riesgo. No obstante este ejemplo derivado de la econometría financiera necesita de otros supuestos. El precio de los instrumentos financieros (bonos, acciones) se asume que sigue una distribución log-normal, y en consecuencia la distribución de los rendimientos es normal. Otra situación donde la varianza es suficiente para describir el riesgo de los rendimientos financieros emerge cuando la función de preferencias del inversor (función de utilidad) es cuadrática.

En los siguientes apartados de este capítulo se revisan diferentes formas de abordar y caracterizar el riesgo financiero que se han propuesto en la literatura.

1.2 El modelo de Markowitz

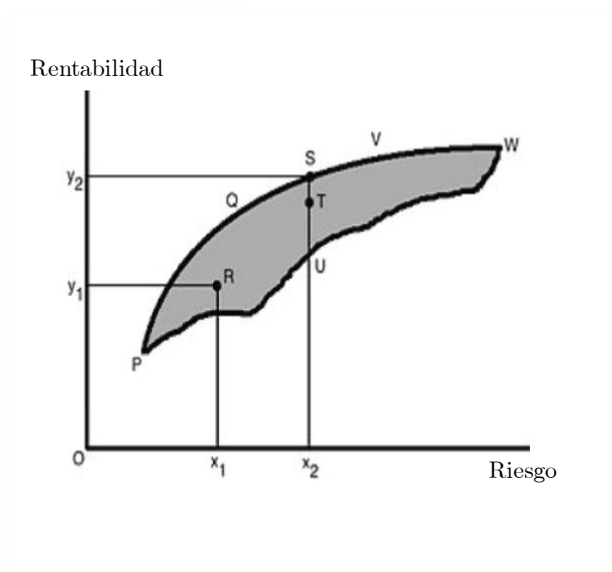
Los inicios del desarrollo de modelos de gestión de riesgos, parten de la Teoría Moderna de carteras, tomando como punto de partida los trabajos: “*The Theory of Investment Value*” de [John Burr Williams \(1938\)](#), reconocido fundador del análisis fundamental; “*Portfolio Selection*” de [Harry Markowitz \(1952\)](#) y “*Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*” de [James Tobin \(1958\)](#). En su trabajo, [Markowitz \(1959\)](#), demostró que la clave para diversificar una cartera no estaba simplemente en el número de acciones que la componen, sino también, y más importante aún, en la correlación de las rentabilidades de las acciones que forman la cartera. Si los retornos están fuertemente correlacionados la cartera no se podrá diversificar, mientras que si la correlación es baja o negativa existen posibilidades de diversificar o aminorar el riesgo. Así, un inversor puede calcular las correlaciones históricas para las rentabilidades de las acciones que conforman el portafolio. Con esta información, Markowitz demostró, con la técnica que se conoce con el nombre de análisis de Media-Varianza, que es posible construir una serie de carteras que sean eficientes en el espacio media varianza.

Al conjunto de combinaciones de rentabilidad y riesgo de todas las carteras eficientes se denomina frontera eficiente. Una vez que ésta es conocida, el inversor, según sus preferencias, se situara de forma razonable en uno u otro punto de la línea de la frontera eficiente, eligiendo así su cartera óptima. Así pues, la cartera óptima es aquella combinación de instrumentos financieros que

representa la relación riesgo-rendimiento que maximiza la satisfacción del inversor.

Por lo tanto, cualquier decisión que sea considerada como racional debe considerar siempre carteras que estén sobre la frontera eficiente. Cualquier otra elección sería irracional. La figura 1.1 representa el conjunto de alternativas de elección riesgo rentabilidad esperada. En la figura 1.1, el área sombreada PVWP incluye todos los valores posibles en los que un inversor puede invertir, las carteras eficientes son los que se encuentran en el límite de PQVW. Por ejemplo, en el nivel de riesgo x_2 , hay tres carteras S, T, U. Sin embargo, la cartera S es la cartera eficiente, ya que tiene el rendimiento más alto en y_2 , en comparación con las carteras T y U. Todas las carteras que se encuentran sobre la línea PQVW son carteras eficientes para un nivel de riesgo dado. Este límite se denomina frontera eficiente. Todas las carteras que se encuentran por debajo de la frontera eficiente no son eficientes debido a que el retorno sería más bajo para el riesgo dado. Del mismo modo, carteras que se encuentran a la derecha de la frontera eficiente no serían lo suficientemente buenas, ya que existe un mayor riesgo para una determinada tasa de retorno. Todas las carteras situadas en el límite de PQVW se denominan carteras eficientes. Las carteras eficientes son las mismas para todos los inversores, ya que todos los inversores quieren el máximo rendimiento con el menor riesgo posible. Las diferentes combinaciones de acciones dependerán del nivel de riesgo que el inversor esté dispuesto a asumir.

Figura 1.1: Combinaciones posibles en la Frontera Eficiente



A nivel práctico, el modelo requiere: (a) calcular la matriz de varianzas y covarianzas para todos los valores negociables y (b) calcular las rentabilidades esperadas. Benninga (2000) muestra cómo obtener esta información a partir de datos históricos.

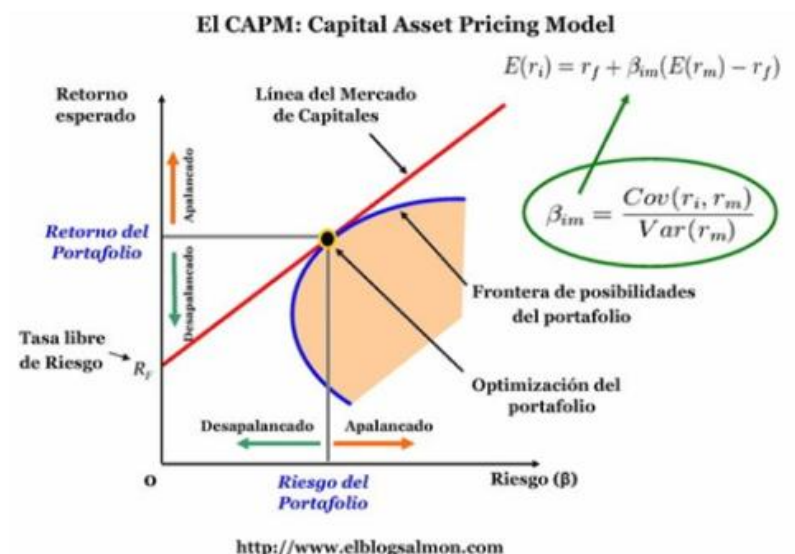
1.3 El modelo Capital Asset Pricing Model: CAPM

El análisis del modelo de Markowitz fue extendido por Tobin en 1958 bajo la premisa de que “todos los inversores pueden elegir la misma cartera siendo indiferente su actitud hacia el riesgo”. La elección de la inversión se encuentra en la línea del mercado de capitales (CML), la cual corta el eje vertical en la tasa libre de riesgo (R_f) y donde es tangente con la frontera eficiente. Por lo tanto, en condiciones de equilibrio, los inversores que tengan aversión por el riesgo elegirán sus carteras óptimas a partir de las combinaciones del activo libre de riesgo y de la cartera de mercado.

Sharpe (1964) profundiza y enriquece el modelo de cartera de Markowitz a partir de la extensión del modelo de equilibrio del mercado de capitales, lo que hoy en día denominamos modelo de valoración de activos de capital (*capital asset pricing model*, CAPM). Este modelo refleja la síntesis de las contribuciones simultáneas de diversos autores, tales como Treynor (1961), Lintner (1965) y las posteriores de Mossin (1966), contribuciones que toman como punto de partida los trabajos realizados por Markowitz (1952, 1959) y Tobin (1958).

El CAPM proporciona fundamentalmente dos conclusiones. La primera se refiere al grado de diversificación de la cartera óptima en equilibrio de mercado. La segunda trata sobre la apropiada medida de riesgo de un activo y la relación que guarda en equilibrio con su tipo de rendimiento esperado. La figura 1.2 sintetiza el modelo CAPM de forma gráfica.

Figura 1.2: CAPM



El CAPM caracteriza de una forma sencilla e intuitiva el riesgo de un activo separándolo en riesgo sistemático¹ y riesgo no sistemático². El riesgo sistemático se refiere a la incertidumbre económica general, al entorno, a lo exógeno, a aquello que no podemos controlar, mientras que el riesgo no sistemático es un riesgo específico de la empresa o de nuestro sector económico. El modelo permite construir la cartera óptima determinando el porcentaje exacto de inversión en cada uno de los activos. Para determinar la fórmula precisa, debe encontrarse la relación lineal entre los retornos de una acción A y el retorno que se habría obtenido si se hubiese invertido en la cartera óptima de mercado. Para ello, se introduce el parámetro beta (β)³, un índice de componente de riesgo de mercado, que es la variable central de este modelo.

Las dificultades prácticas del modelo comienzan con la estimación de β , el cual se calcula con un análisis de varianzas y covarianzas. Si $\beta = 0$, nuestro retorno esperado será solamente R_f , el valor del activo libre de riesgo, que sería su valor mínimo. A medida que la beta aumenta (desplazamiento hacia la derecha sobre el eje horizontal), aumenta también el retorno esperado. Acciones con una $\beta = 1$ se mueven de igual forma que el mercado, por lo tanto, nuestro retorno esperado será igual al retorno del mercado. Acciones con $\beta < 1$ tienden a

¹ También se denomina riesgo de mercado, no diversificable o residual.

² También se denomina riesgo único o propio, diversificable, específico o idiosincrático.

³ β se refiere a la sensibilidad de la acción a los movimientos del mercado (riesgo no diversificable).

amplificar los movimientos conjuntos del mercado, mientras que acciones con $0 < \beta < 1$ tienden a moverse en la misma dirección que el mercado pero en menor proporción.

La relación de equilibrio que describe el CAPM está dada por la siguiente ecuación:

$$E(r_i) = R_f + \beta_{im}(E(R_m) - R_f), \quad (1.1)$$

donde $E(r_i)$ es la tasa de rendimiento esperada de capital sobre el activo i , β_{im} es la *beta* (cantidad de riesgo con respecto a la cartera de mercado) que está dada por la covarianza entre la rentabilidad de la acción y la cartera del mercado dividido por la varianza de la rentabilidad del mercado:

$$\beta_{im} = \frac{\text{Cov}(r_i, R_m)}{\text{Var}(R_m)}. \quad (1.2)$$

Finalmente, $(E(R_m) - R_f)$ es el exceso de rentabilidad de la cartera de mercado o prima de riesgo mercado, donde R_m denota el rendimiento del mercado y R_f el rendimiento de un activo libre de riesgo. El riesgo no sistemático, es aquel que se puede eliminar mediante la diversificación; es decir, a medida que aumenta el número de títulos dentro de la cartera la desviación estándar de los rendimientos de la cartera disminuye a una tasa decreciente, ya que las reducciones de riesgo adicionales serán relativamente más pequeñas después de que se incluyan más de 10 o 15 valores.

1.4 Volatilidad implícita y volatilidad realizada

Otras formas más sofisticadas de medir el riesgo son la volatilidad implícita y la volatilidad realizada, que se han desarrollado en la última década.

La volatilidad implícita se deriva de la valoración de opciones por el mercado utilizando la fórmula de [Black y Scholes \(1973\)](#). Así, el precio de una opción de compra (*call*) está dado de acuerdo con la fórmula de Black-Scholes por:

$$C_t(S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (1.3)$$

donde C_t es el precio de la opción, r el tipo de interés libre de riesgo, K el precio de ejercicio o strike, T la fecha de vencimiento, $N(x)$ es el valor de la función de

probabilidad acumulada de una distribución normal estándar y d_1, d_2 constantes que satisfacen:

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (1.4)$$

En la ecuación todos los parámetros son observables, excepto la volatilidad. Por lo tanto si tenemos la cotización de mercado de la opción, utilizando esta fórmula podemos deducir la volatilidad que el mercado está utilizando para obtener el precio de la opción. A esta volatilidad se le denomina volatilidad implícita. Es una medida de volatilidad que refleja el consenso del mercado en torno al valor de la volatilidad que se refleja en el precio de la opción.

Otra medida de volatilidad es la volatilidad realizada. Este concepto aparece por primera vez en los artículos de [Andersen et al. \(2001\)](#) y [Barndorff et al. \(2002\)](#). La expresión para la volatilidad viene de la teoría de procesos de valoración sin arbitraje y en tiempo continuo, y de la teoría de variación cuadrática. Denotemos $[x]$ para la variación cuadrática de x definida como:

$$[x]_t = p \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} \{X_{t_{i+1}^q} - X_{t_i^q}\}^2, \quad (1.5)$$

para cualquier secuencia de particiones $t_0^q = 0 < t_1^q < \dots < t_m^q = t$ con $\sup_i (t_{i+1}^q - t_i^q) \rightarrow 0$ para $q \rightarrow \infty$. La notación $p \lim$ indica el límite en probabilidad de la suma. Si el logaritmo de los precios sigue una ecuación diferencial estocástica del tipo:

$$x_t = \mu_t dt + \sigma_t dw_t, \quad (1.6)$$

donde σ_t^2 es la volatilidad instantánea, la variación cuadrática toma la misma expresión que la volatilidad integrada definida como:

$$\sigma_t^{2*} = \int_0^t \sigma_u^2 du \quad (1.7)$$

Este método explota la disponibilidad de datos de alta frecuencia como los datos intra-diarios. La volatilidad realizada, denotada por $\{x\}_n$ es el estimador natural de la variación cuadrática, y se define como la suma del cuadrado de los rendimientos de M observaciones intra-diarias durante cada día:

$$\{x\}_n = \sum_{j=1}^M \left\{ x_{(n-1)+\frac{j}{M}} - x_{(n-1)+\frac{j-1}{M}} \right\}^2. \quad (1.8)$$

Este estimador es consistente cuando $M \rightarrow \infty$. La teoría de variación cuadrática revela que bajo ciertas condiciones la volatilidad realizada no es sólo un estimador ex-post insesgado de la volatilidad de los rendimientos diarios, donde el índice del día es n , sino también es asintóticamente libre de error de medida. Empíricamente, si se trata la volatilidad como observada en vez de latente se facilita la modelización mediante métodos simples y directos de variables observables.

1.5 Dinámica temporal de la volatilidad

En la práctica, la volatilidad muestra un comportamiento cambiante en el tiempo. Para recoger esta dinámica temporal de la volatilidad, en la literatura se han propuesto diferentes modelos de volatilidad entre los que destacan por su amplia difusión los modelos GARCH y los modelos de volatilidad estocástica. En esta sección se describen brevemente los modelos GARCH, puesto que esta clase de modelos se utilizarán en los análisis desarrollados en los capítulos 4 y 5 (para un análisis más detallado de los modelos GARCH véase [Tsay, 2010](#)).

El modelo autorregresivo de volatilidad condicional (ARCH), introducido por [Engle \(1982\)](#), permite caracterizar determinadas regularidades empíricas de los activos financieros tales como los conglomerados de volatilidad y las colas pesadas de la distribución. Los modelos ARCH suponen que la varianza no condicional es constante en el tiempo, mientras que la varianza condicional muestra una dinámica temporal. Este modelo tiene la siguiente estructura:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad (1.9)$$

donde $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_t^2)$ y:

$$\sigma_t^2 = w + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2. \quad (1.10)$$

Para que este modelo esté bien definido y la varianza condicional sea positiva los parámetros deben satisfacer $w > 0, \alpha_i \geq 0$.

Para describir adecuadamente la dinámica de la de volatilidad es necesario un elevado número de términos autorregresivos por lo que el modelo anterior se ha generalizado para introducir el valor de la volatilidad retardado como

variable explicativa. A este modelo se le denomina GARCH. Los modelos GARCH poseen una estructura de retardos más flexible y en muchos casos, permiten una descripción más parsimoniosa de los datos. En este caso la especificación de la volatilidad para un GARCH(1,1) está dada por:

$$\sigma_t^2 = w + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (1.11)$$

donde $w > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ y $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ para que el proceso sea estacionario.

De acuerdo al modelo GARCH se tiene que la varianza del proceso depende de los errores y la volatilidad observados en el pasado. La varianza condicional es igual a $Var_{t-1}(y_t) = \sigma_t^2$. Mientras que la varianza no condicional del error está dada por $Var(y_t) = \frac{w}{1 - \alpha - \beta}$, que está correctamente definida siempre y cuando $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. Los procesos GARCH permiten modelar la persistencia en el tiempo de los shocks en la varianza condicional. Una elevada persistencia, al no cumplirse $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, ocasiona que los efectos del shock “tarden en olvidarse”, en tanto que la baja persistencia solo tiene efecto de corta duración.

El modelo GARCH se ha extendido para incluir diversas características observadas en la volatilidad de las series financieras, tales como la no estacionariedad, los efectos apalancamiento, saltos de régimen, etc. Estos modelos han recibido nombres específicos como IGARCH, ARCH-M, EGARCH, TGARCH, MS-GARCH, NGARCH, etc. Estas y otras especificaciones alternativas de los modelos GARCH están recogidas en [Bollerslev \(2008\)](#).

1.6 El valor en riesgo (*Value at risk*, VaR)

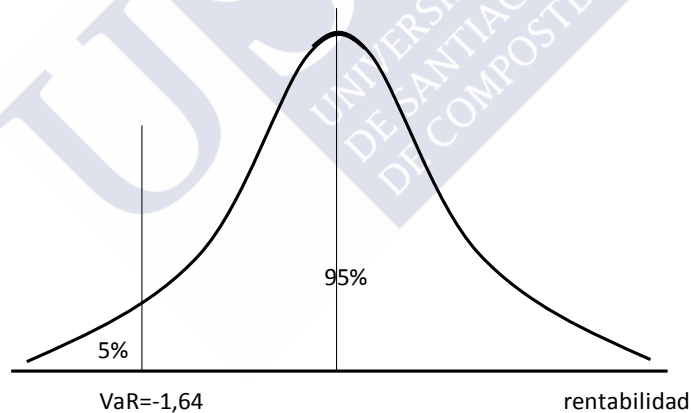
La concepción de riesgo financiero cambia cuando en lugar de calcular una medida de dispersión analizamos únicamente la probabilidad de caídas o subidas extremas en el valor de la inversión. En estos casos analizamos el riesgo desde una óptica diferente al considerar el riesgo a la baja (*downside risk*) o al alza (*upside risk*), por lo que tenemos que determinar la probabilidad y/o la cuantía de la pérdida para un horizonte inversor específico. Esta información se obtiene del estudio de las colas de la distribución de la rentabilidad de un activo o de una cartera.

[Andrew \(1952\)](#) sugirió que un inversor selecciona una cartera con la finalidad de maximizar la probabilidad de alcanzar al menos una determinada

rentabilidad. La idea es que si la rentabilidad es inferior a un determinado umbral, entonces el resultado de la inversión tendrá consecuencias muy negativas para el inversor. También considera que el rendimiento mínimo aceptable es aquel que evita una situación de desastre, formulando así la idea de “la seguridad es lo primero” (*safety first*). De este modo, se enfatiza la asimetría de preferencia entre los resultados positivos y negativos.

El concepto que se ha desarrollado en la literatura, y que se ha popularizado en la práctica, para medir los riesgos extremos es el valor en riesgo, denominado *value at risk* o VaR utilizando la terminología anglosajona. El VaR mide la pérdida máxima que puede experimentar un inversor en un horizonte temporal con un nivel de confianza determinado. El VaR es esencialmente el percentil de la distribución condicional de los rendimientos de un activo, pudiendo aplicarse tanto a nivel de un único activo como a una cartera. La Figura 1.3 muestra el valor del VaR para una variable aleatoria normal estándar.

Figura 1.3: VaR de una variable aleatoria normal estándar.



Existen diferentes procedimientos para calcular el VaR: paramétricos, no paramétricos, una combinación de ambos y simulación. En el primer caso se ajusta una distribución a una serie de rentabilidades históricas y en base a esa distribución ajustada se calcula el cuantil correspondiente al VaR. En el segundo caso, se utiliza información histórica pero no se ajusta ningún tipo de distribución a los datos. En el último caso, se simula la distribución de la rentabilidad para obtener así una estimación del cuantil que representa el VaR. Seguidamente se describen diferentes procedimientos para el cálculo del VaR.

1.6.1 Estimación paramétrica del VaR

Suponiendo que la distribución de pérdidas y ganancias para la rentabilidad de un activo o de una cartera es normal, $r_t^{iid} N(\mu, \sigma^2)$, el VaR se obtiene como:

$$P[r_t \geq VaR] = P\left[\frac{r_t - \mu}{\sigma} \geq \frac{VaR - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \alpha. \quad (1.12)$$

Es decir,

$$\frac{VaR - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha) \equiv \mathbb{Z}_\alpha \Rightarrow VaR = \mu + \sigma \mathbb{Z}_\alpha, \quad (1.13)$$

donde $\Phi^{-1}(\cdot)$ es la función inversa de la distribución normal acumulada y \mathbb{Z}_α es el α -ésimo cuantil de una distribución normal estándar.

Si suponemos que la distribución de pérdidas y ganancias estandarizada tiene una distribución t de Student con ν grados de libertad donde el valor esperado y la varianza de la serie sin estandarizar son μ y $\nu\sigma^2/(\nu-2)$, el VaR se obtiene como:

$$P[r_t \geq VaR] = P\left[\frac{r_t - \mu}{\sigma} \geq \frac{VaR - \mu}{\sigma}\right] = P\left[t_{\nu,t} \geq \frac{VaR - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \alpha. \quad (1.14)$$

Es decir:

$$\frac{VaR - \mu}{\sigma} = t_\nu^{-1}(\alpha) \equiv t_{\nu,\alpha} \Rightarrow VaR = \mu + \sigma t_{\nu,\alpha}. \quad (1.15)$$

donde $t_\nu^{-1}(\cdot)$ es la función inversa de la distribución t de Student, mientras que $t_{\nu,\alpha}$ es el α -ésimo cuantil de una distribución t con ν grados de libertad.

En la determinación del VaR se pueden utilizar diferentes técnicas econométricas para ajustar la media y la varianza de la función de distribución. Una práctica común consiste en utilizar los modelos GARCH para caracterizar la dinámica de la volatilidad y obtener así un valor del VaR que se ajusta a los cambios que experimente este parámetro de la función de distribución.

En el caso de una cartera, para el cálculo del VaR se utiliza la información relativa a la matriz de varianzas y covarianzas de las rentabilidades de los n activos que configuran la cartera. En el caso particular que las rentabilidades siguen una distribución normal, el VaR de una cartera se obtiene a partir del VaR para cada uno de los activos y de la matriz de correlaciones como:

$$VaR_p = \sqrt{VaR' C VaR}, \quad (1.16)$$

donde C es la matriz de correlaciones de dimensión $n \times n$, VaR denota el vector de dimensión $n \times 1$ de los VaR para cada activo de dimensión n y VaR' es su traspuesta.

1.6.2 Método de suavizado exponencial (RiskMetrics®)

J.P. Morgan (1995) desarrolló una metodología simple para el cálculo del VaR que permite tener estimaciones que dan mayor peso a los datos más recientes. El Riskmetrics asume que el rendimiento diario de una cartera sigue una distribución normal condicional: $r_t | F_{t-1} \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$ donde μ_t y σ_t^2 son la media y varianza condicional de r_t , respectivamente, y F_{t-1} es el conjunto de información disponible en el tiempo $t-1$. Además, se supone que;

$$\begin{cases} \mu_t = 0 \\ \sigma_t^2 = \alpha \sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha) r_{t-1}^2 \end{cases}, \quad (1.17)$$

para $0 < \alpha < 1$. Es decir, la varianza sigue un proceso IGARCH(1,1). El valor del parámetro α a menudo se encuentra en el intervalo (0,9, 1): 0,94 para datos diarios y 0,97 para datos mensuales. Unas de las características de esta metodología (véase Tsay, 2010) es que la predicción de la volatilidad de la rentabilidad para un horizonte k , $V(r_{t+k}[k]|t)$, está dada por:

$$V(r_{t+k}[k]|t) = kV(r_{t+1}|t), \quad (1.18)$$

lo cual se conoce (en términos de la desviación estándar) como la regla de la raíz cuadrada del tiempo.

1.6.3 Método de simulación histórica

El VaR por simulación histórica, se obtiene calculando la ganancia o pérdida que se obtendría en un periodo de tiempo de duración igual al periodo de tiempo en que se desea calcular el VaR (1 día, 5 días, etc.) si se repitieran los escenarios de retornos observados en el pasado. La distribución de ganancias y pérdidas de la cartera se genera empíricamente calculando la diferencia entre el valor V para diferentes niveles de precios P_t , de la forma: $\Delta V = V(P_t) - V(P_{t-h})$. El VaR para un nivel de confianza determinado es directamente el percentil de la distribución de probabilidad de los cambios de valor de la cartera. La elección del período muestral refleja un balance entre el uso de tamaños muestrales más

largos y más cortos; los intervalos más grandes incrementan la precisión de la estimación, pero se podrían utilizar datos irrelevantes, omitiéndose cambios importantes en el proceso subyacente (cambios de tendencia).

Los hipotéticos precios futuros para k escenarios se obtienen aplicando los cambios históricos en los precios sobre el nivel actual de los precios:

$$P_{i,k}^* = P_{i,k_0} + \Delta P_{i,k}, \quad i=1,2,\dots,N, \quad (1.19)$$

siendo k_0 el precio de hoy y $\Delta P_{i,k}$ una variación en el precio hipotética. Así, se obtiene un nuevo valor de la cartera con el conjunto completo de precios hipotéticos y se obtiene el rendimiento hipotético correspondiente a esa simulación como:

$$R_{p,k} = \frac{P_{i,k}^* - P_{i,k_0}}{P_{i,k_0}}. \quad (1.20)$$

El valor en riesgo se obtiene a partir de la distribución completa de los rendimientos simulados como el cuantil de la distribución simulada.

Dentro de los beneficios de la simulación histórica se encuentra la simplicidad de la implementación y el hecho de que los escenarios sobre los que se evalúa la cartera ya han sido observados, por lo que se pueden tomar como posibles. Siendo un método robusto e intuitivo, además utiliza correlaciones «condicionales» en el sentido de que pueden ajustarse al comportamiento pasado de los factores de riesgo bajo cada escenario en lugar de tomar la correlación media. No se asume una distribución normal para los retornos de los activos, como en el caso del modelo paramétrico, lo que permite capturar efectos de asimetría y distintos grados de kurtosis de los datos, pues la idea de no ajustar ninguna curva predeterminada aumenta su flexibilidad. Además facilita información no sólo del VaR sino también sobre la pérdida histórica máxima del período de observación.

Sin embargo la simulación histórica presenta una serie de inconvenientes. Al igual que el método paramétrico, da el mismo peso a datos pasados que a datos actuales, por lo que en épocas de alta o baja volatilidad el método no permite realizar ajustes con la velocidad deseada, mostrando debilidad en cuanto a la predicción de eventos extremos (Danielsson et al., 2000). Además, la simulación histórica supone que la distribución asumida no cambia con el

tiempo y por lo tanto es sensible al tamaño de la muestra seleccionada, lo cual puede cambiar drásticamente el resultado. Por lo tanto, la inclusión o exclusión de datos dentro de la simulación puede cambiar los resultados del VaR.

1.6.4 Método de simulación de Monte Carlo

A diferencia de la simulación histórica, el método de simulación de Monte Carlo asume una distribución sobre las rentabilidades de la cartera y sobre las volatilidades y correlaciones de los factores de riesgo. McNeil et al. (2005) describe de forma detallada diversas metodologías de cálculo de VaR usando métodos de simulación de Monte Carlo.

La simulación de Monte Carlo requiere especificar algún proceso estocástico que describa las variables financieras a estudiar y parámetros, básicamente volatilidad y correlación, de dicha ecuación. El movimiento geométrico Browniano es un modelo de comportamiento de los precios que se utiliza habitualmente en la práctica: $dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dB_t$, donde el primer término de la derecha es el componente determinístico o de tendencia, recogido por el coeficiente de la media μ y el segundo término es el componente estocástico afectado del coeficiente de difusión σ , a través del movimiento Browniano tal que $\Delta B_t \sim N(0, \sqrt{dt})$. Partiendo de esta información, se simulan posibles sendas para las variables de interés a partir de las cuales se obtiene una muestra de las potenciales ganancias o pérdidas de una inversión. El cuantil de esta muestra nos daría la estimación del VaR.

La gran ventaja que tiene este método es su flexibilidad dado que puede ajustarse a cualquier estructura simplemente ajustando el proceso estocástico que describe el comportamiento del precio del activo. También permite modelizar con una mayor eficacia instrumentos derivados que se caracterizan por su no linealidad, como es el caso de las opciones. Por todo lo expuesto, se puede considerar que este es el método más completo para medir el riesgo de mercado: es más atractivo cuanto mayor sean las dimensiones del problema y puede tener en cuenta una amplia gama de riesgos al incorporar variación temporal en los parámetros, colas gruesas y escenarios extremos. Tiene como inconveniente que su cálculo es más complejo y muestra mayor coste computacional, siendo esto un riesgo para el modelo.

1.6.5 El CAViaR

Engle et al. (2004) proponen un enfoque diferente para la estimación del cuantil que consiste en modelizar directamente la dinámica temporal del cuantil con un modelo analítico autorregresivo denominado CAViaR.

Supongamos que observamos un vector de rendimientos de la cartera y dada la probabilidad asociada con el VaR que se denota por θ . Dado un vector de variables observables en el tiempo, x_t y un vector de parámetros β . La especificación del CAViaR está dado por:

$$f_t(\beta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^q \beta_i f_{t-i}(\beta) + \sum_{j=1}^r \beta_j l(x_{t-j}). \quad (1.21)$$

Donde $p = q + r + 1$ es la dimensión de β y l es una función de un número finito de retardos observables. Los términos autorregresivos $\beta_i f_{t-i}(\beta)$, $i = 1, \dots, q$ recogen el efecto de los cambios en los cuantiles a lo largo del tiempo. Este modelo tiene diferentes especificaciones como el valor absoluto simétrico, pendiente indirecta o GARCH asimétrico. Estas y otras formulaciones alternativas pueden consultarse en Engle et al. (2004).

1.7 Contraste del modelo VaR

Existen diversos procedimientos para contrastar si la estimación del VaR es correcta. A continuación se describen las que han tenido una difusión más amplia y mayor aplicabilidad práctica.

1.7.1 Test de Kupiec

Este test de cobertura condicional propuesto por Kupiec (1995) se utiliza para contrastar si el número de excepciones es coherente con el nivel de confianza. Así, se evalúa la hipótesis nula de que la probabilidad de fallo sea igual a α utilizando el test de razón de verosimilitud

$$LR = -2 \ln \left(\frac{(1-p)^{T-x} p^x}{(1-\hat{p})^{T-x} \hat{p}^x} \right) \sim \chi_1^2, \quad (1.22)$$

donde x es el número de excepciones o fallas, T el número de observaciones incluidas en el backtesting y $\hat{p} = \frac{x}{T}$ es el estimador de máxima verosimilitud.

Bajo la hipótesis nula de que el modelo es correcto, el estadístico LR se distribuye asintóticamente como una χ^2 con un grado de libertad.

1.7.2 Test de Christoffersen

El contraste más ampliamente conocido y aplicado de cobertura condicional fue desarrollado por Christoffersen (1998). La importancia de las pruebas de cobertura condicional surge de la observación de agrupamientos de la volatilidad en muchas series de tiempo financieras. Un buen pronóstico de intervalos debe ser estricto en tiempos tranquilos y amplios en tiempos volátiles, por lo que las observaciones que caen fuera de un intervalo previsto se extienden por toda la muestra, y no vienen en grupos. Un intervalo de predicción puede producir correcta la cobertura incondicional, sin embargo, puede no dar cuenta de la dinámica en tiempo de orden superior.

Dada la siguiente variable indicador:

$$I_t = \begin{cases} 1 \rightarrow si(r_t < v_t) \\ 0 \rightarrow si(r_t > v_t) \end{cases}, \quad (1.23)$$

el proceso estocástico $\{I_t\}$ se denomina proceso de fallo. El cálculo de VaR es correcto si muestra cobertura condicional correcta; es decir, $E[I_{t|t-1}] = p \quad \forall t$, lo que es equivalente a afirmar que la serie I_t es i.i.d. con media p .

Christoffersen desarrolló un procedimiento de contraste para la cobertura condicional en tres etapas. Primero, se contrasta la cobertura incondicional correcta con el test de razón de verosimilitud dado por:

$$LR_{uc} = -2\ln[(1-p)^{T-N} p^N] + 2\ln[(1-\hat{p})^{T-N} \hat{p}^N] \sim \chi_1^2. \quad (1.24)$$

En segundo lugar, se contrasta la hipótesis de independencia frente a la hipótesis alternativa de dependencia dada por un proceso de Markov de primer orden con el test de razón de verosimilitud dado por:

$$LR_{ind} = -2\ln[(1-\hat{p})^{(N_{00}+N_{10})} \hat{p}^{(N_{01}+N_{11})}] + 2\ln[(1-\hat{p}_{01})^{N_{00}} \hat{p}_{01}^{N_{01}} (1-\hat{p}_{11})^{N_{10}} \hat{p}_{11}^{N_{11}}] \sim \chi_1^2, \quad (1.25)$$

donde:

$N = n_1 \rightarrow$ Número de valores 1 en el indicador de la serie (número de fallos),
 $(T-N) = n_0 \rightarrow$ Número de valores 0 en el indicador de la serie (total de observaciones menos el número de fallos),

$p \rightarrow$ Nivel de tolerancia (probabilidad) con que las mediciones del VaR son estimadas,

$\hat{p} = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$ es el estimador máximo verosímil de p ,

$n_{ij} \rightarrow$ Número de valores i seguidos de valores j en la serie $I_t (i, j = 0, 1)$,

$p_{ij} = P_r \{I_t = i | I_{t-1} = j\} (i, j = 0, 1)$,

$\hat{p}_{01} = \frac{N_{01}}{N_{00} + N_{01}}$,

$\hat{p}_{11} = \frac{N_{11}}{N_{10} + N_{11}}$,

$\hat{p} = \frac{N_{01} + N_{11}}{N_{00} + N_{01} + N_{10} + N_{11}}$.

En tercer lugar, se contrasta la hipótesis de cobertura condicional correcta sumando los dos estadísticos anteriores, con lo que tenemos que:

$$LR_{cc} = -2 \ln \left[(1-p)^{T-N} p^N \right] + 2 \ln \left[(1-\hat{p}_{01})^{N_{00}} \hat{p}_{01}^{N_{01}} (1-\hat{p}_{11})^{N_{10}} \hat{p}_{11}^{N_{11}} \right] \sim \chi^2_2. (1.26)$$

El contraste de Christoffersen tiene la limitación de que sólo se refiere a la dependencia de primer orden. Así, es posible podría rechazar una serie que no tiene dependencia de primer orden de Markov pero que muestre algún otro tipo de estructura de dependencia (por ejemplo, la dependencia de orden superior de Markov o dependencia periódica). Los trabajos de [Christoffersen et al. \(2000\)](#) y [Clements et al. \(2003\)](#) generalizan este análisis y sugieren una regresión de la serie I_t sobre sus propios valores retardados y algunas otras variables explicativas como los rendimientos retardados observados, esto es:

$$I_t = \alpha_0 + \sum_{s=1}^S \alpha_s I_{t-s} + \sum_{s=1}^{S-1} \mu_s D_{s,t} + \varepsilon_t, \quad (1.27)$$

donde $D_{s,t}$ denota las variable explicativas del modelo. La hipótesis nula de independencia condicional, $\alpha = p$ y $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = \mu_1 = \dots = \mu_s = 0$ puede contrastarse utilizando el test de la F.

1.7.3 Test mixto de Kupiec

[Haas \(2001\)](#) propone una prueba de mejora de la independencia y la cobertura utilizando las ideas de Christoffersen y Kupiec denominado “Mixed Kupiec-Test”. Este test mide el tiempo entre las excepciones en lugar de observar sólo si la excepción hoy en día depende del resultado del día anterior, siendo una prueba potencialmente capaz de captar las formas más generales de

la dependencia entre fallos. De forma similar, el estudio de las duraciones entre fallos ha sido desarrollado por [Christoffersen et al. \(2004\)](#).

1.7.4 Test de Engle y Manganelli

[Engle y Manganelli \(2004\)](#) sugieren usar un modelo de regresión lineal de violaciones actuales a violaciones pasadas, de manera que se pueda probar la hipótesis de eficiencia condicional. Dado $Hit(\alpha) = I_t(\alpha) - \alpha$,

$$Hit(\alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha \rightarrow r_t < VaR_{1-\alpha}(\alpha) \\ -\alpha \rightarrow \text{otra manera} \end{cases}, \quad (1.28)$$

se formula el siguiente modelo de regresión lineal:

$$Hit(\alpha) = \delta + \sum_{k=1}^K \beta_k Hit_{t-k}(\alpha) + \sum_{k=1}^K \gamma_k g[Hit_{t-k}(\alpha), Hit_{t-k-1}(\alpha), \dots, z_{t-k}, z_{t-k-1}, \dots] + \varepsilon_t, \quad (1.29)$$

donde ε_t es un proceso *i.i.d.*, $g(\cdot)$ es una función de violaciones pasadas y z_{t-k} son las variables de conjunto de información disponible. Podemos considerar como variables explicativas las rentabilidades pasadas, su cuadrado, las previsiones del VaR, etc. La hipótesis nula de dependencia condicional es:

$$H_0 : \delta = \beta_k = \gamma_k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, K. \quad (1.30)$$

Bajo la hipótesis nula $E[Hit(\alpha)] = E(\varepsilon_t) = 0$, lo que implica que $E[I_t(\alpha)] = \alpha$. Dado el vector de parámetros $\Psi = (\delta \beta_1 \dots \beta_K \gamma_1 \dots \gamma_K)'$ y la matriz de variables explicativas Z , el estadístico para contrastar la hipótesis nula es:

$$DQ_{cc} = \frac{\hat{\Psi}' Z' Z \hat{\Psi}}{\alpha(1-\alpha)} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{L} \chi^2_{(2K+1)}. \quad (1.31)$$

Una extensión de este test utilizada en la literatura consiste en utilizar un modelo binario, logit o probit, en lugar de la regresión lineal ([véase Patton, 2000](#)).

1.7.5 La función de pérdida

[López \(1999\)](#) y [Campbell \(2005\)](#) sugieren una aproximación alternativa para el contraste del VaR que consiste en analizar la magnitud de los excesos ocurridos considerando una función de pérdidas que refleje la preocupación específica del gestor de riesgos o de un regulador.

López propuso tres funciones de pérdidas que podrían reflejar la función de utilidad de un ente regulador: la función de pérdida del binomio, la función de magnitud de pérdida y la función de zona de pérdida. En términos generales, las dos últimas penalizar fallos más gravemente, en comparación con la función de pérdida binomial. Como cualquier aplicación de funciones de pérdida, este enfoque es vulnerable a errores de especificación de la función de pérdida. Seguidamente se definen la función de pérdida reguladora y la función de pérdida de la empresa:

$$\text{Función de pérdida reguladora: } I_t = \begin{cases} (r_t - v_t)^2 \text{ si } r_t < v_t \\ 0 \rightarrow \text{otro caso} \end{cases}.$$

$$\text{Función de pérdida de la empresa: } I_t = \begin{cases} (r_t - v_t)^2 \text{ si } r_t < v_t \\ -\alpha v_t \rightarrow \text{otro caso} \end{cases}.$$

Dada la función de pérdida, podemos contrastar la superioridad de un modelo con respecto a otro utilizando la prueba de los signos. Consideremos $Z_t = l_{it} - l_{jt}$, donde l_{it} y l_{jt} son los valores de la función de pérdida particular generada por el modelo i y el modelo j en el instante t, respectivamente. Z_t se denomina pérdida diferencia entre los dos modelos: valores negativos de Z_t indican una superioridad del modelo i sobre el j, mientras que valores positivos indican lo contrario. Si definimos la variable indicador Ψ_t como:

$$\Psi_t = \begin{cases} 1 \rightarrow \text{si } (Z_t \geq 0) \\ 0 \rightarrow \text{si } (Z_t < 0) \end{cases}, \quad (1.32)$$

El estadístico $S_{ij} = \sum_{t=1}^T \Psi_t$ tiene una distribución binomial con parámetros (T, 0,5) bajo la hipótesis nula de igualdad entre los dos modelos. Para muestras grandes, este estadístico converge a una distribución normal, con lo que:

$$S_{ij} = \frac{S_{ij} - 0.5T}{\sqrt{0.25T}} \sim N(0,1). \quad (1.33)$$

La hipótesis nula se rechaza al 5% si $S_{ij} \leq -1.66$.

1.7.6 Stress Testing

El stress testing analiza cómo se comporta una cartera o instrumento financiero bajo algunos de los movimientos más extremos del mercado. El test se centra, principalmente, en el estudio de acontecimientos extremos en los

mercados que, si se produjeran, causarían grandes pérdidas en las carteras o en los instrumentos financieros. Las volatilidades históricas calculadas a partir de series de precios pueden infravalorar la probabilidad de que se produzcan movimientos extremos en los mercados, ya sea por cambios en la situación política y/o por cambios en la situación macroeconómica. Esta técnica también suele denominarse análisis de escenarios ya que examina el efecto de grandes movimientos simulados en variables financieras relevantes sobre la cartera o instrumento financiero, analizando uno o varios escenarios específicos en el que las condiciones de mercado son extremas y nada favorables.

Los escenarios de estrés y sensibilidad son pruebas “no estadísticas” debido a que la forma de elegir los escenarios a utilizar es muy subjetiva. Se toma en cuenta que los modelos de valor en riesgo por simplicidad funcionan sólo bajo condiciones normales. Por lo tanto, es necesario valorar el modelo bajo condiciones en donde los supuestos se incumplan o se colapsen, es decir, valorar el modelo en situaciones extremas. La ventaja de este contraste es que es posible cubrir situaciones completamente ajenas a los datos históricos.

Las principales debilidades de este contraste parten de que, los resultados del análisis dependen en su totalidad de los escenarios elegidos por el gestor. La elección de los escenarios es subjetiva, por lo que si se eligen escenarios poco probables, se llegará a mediciones erróneas del VaR siendo necesario comprobar la consistencia de los posibles escenarios de precios.

Las implementaciones más sofisticadas del stress testing se realizan en dos pasos (véase [Jorion, 1997](#)). Primero, hacer fluctuar hacia arriba y hacia abajo todas las variables asociadas a factores de riesgo individualmente, por ejemplo, 1.65 desviaciones estándar, para cuantificar los cambios a la cartera. Segundo, evaluar un escenario en el peor de los casos, donde todas las variables sean presionadas en la dirección que se considere la peor pérdida. Así pues, este tipo de contrastes deberían de considerarse como información complementaria y adicional al método de estimación que sea utilizado para aproximar el VaR.

1.8 Expected Shortfall

Una medida alternativa al VaR es la pérdida esperada condicionada a que el valor de la pérdida es superior al VaR, denominada *expected shortfall* (ES),

conditional value at risk o *expected tail loss*. Es decir, el ES es el promedio de los $(1-\alpha)100\%$ peores casos y puede ser calculado a través del promedio de los valores que exceden el VaR con un nivel de confianza de $1-\alpha$. Para el caso de distribuciones continuas está definido por:

$$ES_{\alpha} = E(r|r < VaR_{\alpha}) = \int_{-\infty}^{VaR_{\alpha}} rf_R(r)dr, \quad (1.34)$$

donde $f(\cdot)$ es la densidad de la rentabilidad. Si la rentabilidad sigue una distribución normal, $r \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces el ES está dado por:

$$ES_{\alpha} = \mu + \sigma \frac{\phi(z)}{1-\Phi(z)}, \quad (1.35)$$

donde $\phi(\cdot)$ y $\Phi(\cdot)$ son las funciones de densidad y distribución de la variable aleatoria normal estándar, respectivamente y $z = \frac{1}{\sigma}(VaR_{\alpha} - \mu)$.

Rockafellar et al. (2001), exponen algunas propiedades fundamentales del ES y muestran algunas ventajas significativas de esta metodología respecto al VaR tradicional y, se prueba que el ES puede cuantificar situaciones arriesgadas o de peligro más allá que el VaR, comprobando de esta forma su coherencia. Según Kibzun et al. (2006), el expected shortfall, bajo condiciones normales, es una función convexa con respecto a las posiciones tomadas, permitiendo la construcción de un algoritmo eficiente de optimización; por lo que si la función de pérdida es convexa en una estrategia financiera para todas las realizaciones de un vector aleatorio, el ES también es convexo en la estrategia. Esta propiedad es conveniente para la optimización de carteras.

Capítulo 2

Teoría del valor extremo

2.1 Introducción

En los últimos años, la teoría de los valores extremos ([véase Embrechts et al., 1997](#)) ha sido una herramienta ampliamente utilizada para la medición y gestión de riesgos dado que tiene un papel fundamental en la caracterización de las colas de una distribución de probabilidad. Basándose en el análisis y cuantificación de acontecimientos desfavorables o de elevadas oscilaciones en los mercados, tales como crisis bursátiles, fuertes devaluaciones, tormentas monetarias, etc., el propósito de esta teoría es identificar y modelizar los máximos y los mínimos de una variable aleatoria

Del mismo modo que el teorema central del límite estudia el comportamiento de la medida de tendencia central de la distribución, la teoría de los valores extremos (EVT) estudia la distribución límite del valor máximo de una variable aleatoria bajo el supuesto de que los rendimientos son independientes y siguen una misma distribución. La EVT ha sido ampliamente estudiada y aplicada en diversas áreas de conocimiento como la hidrología, geología o la ingeniería y, en los últimos años, su uso se ha extendido a las finanzas.

La aplicación de la EVT requiere en una etapa inicial la obtención de una serie de valores extremos a partir de una serie de datos observados. En el área de finanzas, estos valores extremos se identifican como el valor negativo de las

rentabilidades de un activo o de una cartera, de modo que los eventos con mayor valor corresponden a pérdidas muy grandes. Obviamente, la relevancia de la cola izquierda o derecha de la distribución de la rentabilidad depende de la posición larga o corta del inversor, si bien a efectos teóricos el estudio de máximos o mínimos es idéntico. Para identificar valores extremos en una serie de rentabilidades podemos adoptar dos enfoques claramente diferenciados en la literatura: (a) el método de máximos por bloques, (*Block Maximum Method*, BMM), (b) el método de picos sobre el umbral (*Peak Over a Threshold*, POT). En el primer caso, las observaciones de máximos son obtenidas como la observación máxima que se ha obtenido durante un período de tiempo (por ejemplo, un mes), mientras que en el segundo caso los máximos son aquellas observaciones que ha excedido un determinado umbral.

En los siguientes epígrafes se revisa brevemente estos dos métodos así como el cálculo de las medidas de riesgo asociadas.

2.2 Método de máximo por bloques

Con esta metodología se identifican los máximos de una serie como los máximos observados en diferentes bloques de observaciones de igual longitud y no superpuestos en los que se divide una serie temporal. La ventaja de este procedimiento radica en que es posible reducir la dependencia entre los eventos extremos y además se garantiza el hecho de que se obtienen observaciones de máximos (locales) a lo largo de toda la muestra. Sin embargo, [Tsay \(2010\)](#) sugiere que este método no tiene en cuenta la información asociada a otras observaciones extremas que no correspondan al máximo de su respectivo bloque, problema que se agrava si tenemos agrupamiento de máximos. Asimismo, la información obtenida se reduce a medida que se aumenta el tamaño del bloque, generando posibles pérdidas de información.

Dada la rentabilidad de un activo, r_t . Consideramos n rentabilidades ordenadas, $\{r_{(1)}, \dots, r_{(n)}\}$, donde $r_{(1)}$ es el valor más pequeño y $r_{(n)}$ el máximo valor; es decir, $r_{(1)} = \min_{1 \leq j \leq n} \{r_j\}$ y $r_{(n)} = \max_{1 \leq j \leq n} \{r_j\}$. Asumiendo que los retornos r_t son independientes e idénticamente distribuidos con función de distribución acumulada $F(x)$ y que el rango de los retornos r_t es $[l, u]$ (para los logaritmos

de los rendimientos tendremos que $l = -\infty$ y $u = \infty$), la función de distribución (CDF) de $r_{(n)}$, dada por $F_{n,n}(x)$, podemos escribirla como:

$$F_{n,n}(x) = P_r(r_1 \leq x, r_2 \leq x, \dots, r_n \leq x) = \prod_{j=1}^n P_r(r_j \leq x) = [F_{(x)}]^n. \quad (2.1)$$

El problema con el que nos encontramos en términos prácticos cuando queremos caracterizar la distribución del máximo radica en el hecho de que $F_{n,n}(x)$ es desconocida, dado que $F(x)$ también lo es, y cuando n tiende a infinito esta distribución se convierte en degenerada: $F_{n,n}(x) \rightarrow 0$ si $x < u$ y $F_{n,n}(x) \rightarrow 1$ si $x \geq u$. Para evitar esta problemática, el propósito de la EVT es buscar dos secuencias $\{\beta_n\}$ y $\{\alpha_n\}$, donde $\alpha_n > 0$ de forma que la distribución de $r_{(n^*)} \equiv (r_{(n)} - \beta_n) / \alpha_n$ converja a una función de distribución no degenerada cuando n tiende a infinito. Estas dos secuencias representan la localización de la serie y el factor escalar, respectivamente. Así, la distribución límite del mínimo normalizado $r_{(n^*)}$ bajo independencia es:

$$F_*(x) = \begin{cases} \exp[-(1 + \xi x)^{-1/\xi}] & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp[-\exp(-x)] & \text{si } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $x < -1/\xi$ si $\xi < 0$ y para $x > -1/\xi$ si $\xi > 0$ y donde $*$ significa el máximo. El caso de que $\xi = 0$, se toma como el límite cuando $\xi \rightarrow 0$. El parámetro ξ indica la forma de la distribución generalizada de valor extremo y determina el comportamiento de la cola de distribución en el límite, pudiendo generar colas suaves, medias o gruesas. Por otra parte, su inversa, $\alpha = 1/\xi$, nos da el índice de cola de la distribución.

La distribución límite de (2.2) es la distribución generalizada de valor extremo (GEV), propuesta en los estudios de matemáticas y mecánica por [Von Mises \(1954\)](#) y la distribución para el máximo de [Jenkinson \(1955\)](#). La GEV anida tres tipos de distribución límite:

- Tipo I: $\xi = 0$, familia de Gumbel:

$$F_*(x) = \exp[-\exp(-x)], -\infty < x < \infty. \quad (2.3)$$

- Tipo II: $\xi > 0$, familia de Fréchet:

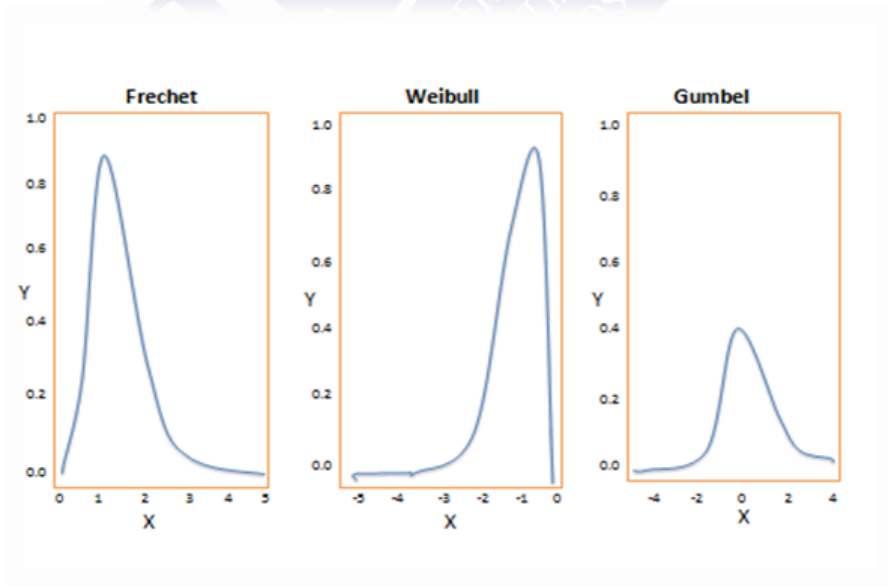
$$F_*(x) = \begin{cases} \exp[-(1 + \xi x)^{-1/\xi}] & \text{si } x > -1/\xi, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (2.4)$$

- Tipo III: $\xi < 0$, familia de Weibull:

$$F_*(x) = \begin{cases} \exp\left[-(1 + \xi x)^{-1/\xi}\right] & \text{si } x < -1/\xi, \\ 1 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (2.5)$$

La distribución Gumbel representará las colas medias, la distribución Fréchet las colas gruesas y la distribución Weibull las más suaves. De una forma más general la GEV puede ser obtenida fijando el valor de $\xi = 0$ para la distribución Gumbel, $\xi = \alpha^{-1}$ para la distribución Fréchet y $\xi = -\alpha^{-1}$ en el caso de la distribución Weibull. De esta forma es posible realizar la estimación en la metodología de máximos por bloques usando la distribución GEV y el método de máxima verosimilitud. Dependiendo del resultado de la estimación del parámetro ξ , si es mayor, menor o igual a cero, la GEV toma alguna de las 3 formas funcionales anteriormente descritas. En la figura 2.1 se muestran la forma que tienen las funciones de densidad para las tres distribuciones. Como se puede apreciar la densidad decae exponencialmente para la distribución Fréchet, con lo que se adapta bien a las distribuciones de colas pesadas.

Figura 2.1: Distribuciones estándar de valores extremos.



Un concepto asociado a la función de distribución de los máximos (véase McNeil et al., 2005) es el dominio de atracción de los máximos (maximum domain attraction, MDA). Para la distribución GEV con $\xi > 0$ (Fréchet) el MDA está definido como:

$$F_R \in MDA(F_\xi) \leftrightarrow \bar{F}_R(x) = x^{-1/\xi} L(x), \quad (2.6)$$

donde $\xi > 0$, $\bar{F}_R(x) = 1 - F_R(x)$ es la función de supervivencia de R , y $L(x)$ corresponde a una función que varía lentamente. Las funciones que pertenecen a este MDA son funciones en las cuales sus colas decaen a una tasa constante⁴, (véase [Farmer et al., 2004](#)). Formalmente, se dice que $L(x)$ es una función que varía lentamente si es una función que se puede medir en el intervalo $(0, \infty)$ y satisface la condición:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad (2.7)$$

para $t > 0$. Ejemplos de esta función son $L(x) = k$ donde k es una constante y $L(x) = \ln(x)$. [Embrechts et al. \(1997\)](#) muestran que para variables aleatorias no negativas que pertenecen al MDA de la distribución Fréchet, $E(X^k)$ su k -ésimo momento, es igual a infinito para $k > 1/\xi$. Para el caso Gumbel, $\xi = 0$, aunque su MDA se encuentra especialmente en distribuciones de colas livianas o medias, también se incluyen algunas distribuciones con colas más pesadas que las de la normal. A diferencia del caso Fréchet donde sus colas decaen a una tasa constante, en general las colas de las distribuciones que pertenecen al MDA de Gumbel decrecen de forma exponencial, un ejemplo de este caso es la distribución lognormal. Para $\xi < 0$, el MDA de la distribución Weibull resulta poco atractivo para la medición de riesgos de mercado, ya que a éste pertenecen distribuciones truncadas en la cola derecha como es el caso de las distribuciones uniforme, triangular y beta.

En términos prácticos, la decisión acerca del tamaño del bloque n tiene implicaciones sobre los resultados obtenidos con esta metodología. Si se utilizan bloques muy pequeños se tiene una serie de máximos con gran cantidad de observaciones, aunque puede producir sesgos en la estimación debido a la mala aproximación del resultado límite presentado en el teorema de [Fisher et al. \(1928\)](#). Por otra parte, tamaños de bloque grandes reducen este problema, pero generan una serie de máximos con pocas observaciones, lo cual puede producir estimaciones con varianzas grandes.

⁴ En estos casos, se dice que las distribuciones poseen colas que varían regularmente o power tails. Estas a su vez se encuentran relacionadas con un concepto conocido como leyes de potencia.

2.3 Método de picos sobre el umbral

El método POT, identifica los valores extremos de la serie de retornos como aquellos que excedan un determinado umbral u . A esos valores se les denomina exceso de rentabilidad. Así, con la metodología POT el número de valores extremos no depende del número de observaciones incluidas en el análisis, aunque comparado con el método de máximo por bloques la serie de máximos puede presentar un mayor grado de dependencia.

Dada una variable aleatoria X con función de distribución F_x . Entonces, la función de distribución de X condicionada a que tome un valor mayor que un umbral dado por u , conocida como la distribución de excesos de X , está dada por:

$$F_{x,u}(y) = P(X - u \leq y | X > u), \quad (2.8)$$

donde $0 \leq y \leq x_F - u$ corresponde al extremo superior de la variable aleatoria X , siendo u el umbral determinado, $y = x - u$ corresponde al valor que excede u y x_F es el último punto de la función de distribución $F(\cdot)$. $F_{x,u}$ puede reescribirse en términos de F ,

$$F_{x,u}(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(X) - F(u)}{1 - F(u)}. \quad (2.9)$$

Para un umbral elevado, la función de distribución condicional de los excesos se aproxima a una distribución generalizada de Pareto (véase [Pickands, 1975](#) y [Balkema et al., 1974](#)), mediante $F_{x,u}(y) \approx G_{\xi,\sigma}(y)$, $u \rightarrow \infty$:

$$G_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} \left[1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi}\right] & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp^{-x/\beta} & \text{si } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

para $x \in [0, (x_F - u)]$ si $\xi \geq 0$ y $x \in [0, -\beta/\xi]$ si $\xi < 0$.

El parámetro ξ refleja el comportamiento de la cola, sirviendo como indicador de su peso. [Balkema et al. \(1974\)](#) y [Pickands \(1975\)](#) demuestran que la distribución generalizada de Pareto (GPD) es la única función de distribución no degenerada que aproxima el comportamiento de la función de excesos. Además, aquellas distribuciones para las que sus máximos converjan a la distribución GEV, su distribución de excesos converge a una GPD, siendo el parámetro ξ de la GPD el mismo parámetro que para la distribución GEV.

Dependiendo del valor del parámetro ξ se obtienen tres tipos de funciones de distribución. En el caso que $\xi > 0$, la GPD es una distribución de Pareto con parámetros $\alpha = 1/\xi$, $k = \beta/\xi$ para valores no negativos de la variable aleatoria $y \geq 0$. Para $\xi = 0$ la GPD corresponde a una distribución exponencial con parámetro $1/\beta$ e $y \geq 0$. Cuando $\xi < 0$, la GPD toma la forma de una distribución del tipo Pareto II, la cual está definida para el rango $0 \leq y \leq -\beta/\xi$.

Dado un umbral u_0 , supongamos que el exceso $x - u_0$ sigue una distribución GPD con parámetros ξ y β , donde $\beta_0 > 0$ y $0 < \xi < 1$. Por tanto, el exceso de media por encima del umbral u_0 es:

$$E(X - u_0 | X > u_0) = \frac{\beta_{(u_0)}}{1 - \xi}, \quad (2.11)$$

con lo que para cualquier $u > u_0$ se define la función exceso de media $e(u)$ como:

$$e(u) = E(X - u_0 | X > u_0) = \frac{\beta_0 + \xi(u - u_0)}{1 - \xi}; \quad (2.12)$$

es decir, para cualquier $y > 0$

$$e(u_0 + y) = E(X - (u_0 + y) | X > (u_0 + y)) = \frac{\beta_0 + \xi(y)}{1 - \xi}. \quad (2.13)$$

En consecuencia, la función de exceso de media es una función lineal de $y = u - u_0$ para un valor fijo de ξ . Este resultado permite inferir el valor apropiado del umbral u_0 para el GPD de forma gráfica, utilizando la media muestral de los excesos sobre el umbral u como estimador del valor esperado de los excesos definidos como:

$$e_T(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} (X_{t_i} - u), \quad (2.14)$$

donde N_u es el número de retornos que exceden el umbral u y X_{t_i} es el valor de los retornos correspondientes. Partiendo de este estimador de la media de los excesos, se analiza la tendencia de las parejas ordenadas $(u, e_T(u))$. Si $G_{\xi, \sigma}$ es una aproximación válida de $F_{x, u}$ para un umbral dado u , el gráfico de la media de los excesos debe ser aproximadamente lineal alrededor de u de acuerdo con la ecuación (2.12). Esto permite establecer intervalos a partir de los cuales se puede seleccionar el umbral. Además, si la distribución de la serie bajo análisis tiene colas pesadas y su primer momento es finito, $0 < \xi < 1$, la pendiente de este gráfico, $\xi/(1 - \xi)$, debe ser positiva.

Una metodología muy conocida utilizada para la selección del umbral se basa en el estimador de [Hill \(1975\)](#), la cual es aplicable para distribuciones que pertenezcan al MDA de la distribución Fréchet y el estimador de [Pickands \(1975\)](#). Algunas propiedades asintóticas del estimador de Pickands pueden estudiarse en [Dekkers et al. \(1989\)](#).

De acuerdo con la ecuación (2.6) para una variable aleatoria *i.i.d.* R_1, R_2, \dots, R_n ,

$$\bar{F}_R(x) = X^{-\alpha} L(x), \quad \alpha = 1/\xi > 0, \quad (2.15)$$

si y solo si $F_R \in MDA(\Phi_\alpha)$. Se demuestra que el estimador de máxima verosimilitud del índice de colas condicionado a un umbral dado, $\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill}$ es:

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill} = \left[\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\ln r_{j,n} - \ln r_{k,n}) \right]^{-1} \quad (2.16)$$

Donde $R_{n,n}, \dots, R_{2,n}, R_{1,n}$ son los estadísticos de orden de R tal que $R_{n,n} \leq \dots \leq R_{2,n} \leq R_{1,n}$ y $k = N_u$ es el número de observaciones que exceden el umbral. Finalmente, utilizando la propiedad de invarianza de los estimadores de máxima verosimilitud se obtiene: $\hat{\xi}_{k,n}^{Hill} = (\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill})^{-1}$.

Desde un punto de vista teórico, el atractivo del estimador de Hill, se justifica por sus propiedades asintóticas, que se pueden resumir en [Embrechts et al. \(1997\)](#). Es posible demostrar la débil consistencia, si $k \rightarrow \infty, k/n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ y R es una variable aleatoria *i.i.d* que satisface $F_R \in MDA(F_\xi)$, entonces: $\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill} \xrightarrow{p} \alpha$ y además bajo hipótesis de normalidad asintótica $\sqrt{k}(\hat{\alpha}_{k,n}^{Hill} - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, \alpha^2)$, [Danielsson et al. \(1997\)](#) y [Drees et al. \(1998\)](#).

Una herramienta utilizada para seleccionar el umbral es el “*gráfico de Hill*”, [Reiss et.al. \(2001\)](#) en el cual se gráfica el estimador de Hill para diferentes valores de k , asociados a distintos umbrales u . Es decir se grafican las siguientes parejas ordenadas: $\{(k, \alpha_{k,n}^{Hill}) : k = 2, 3, \dots, n\}$. El conjunto de valores apropiados para k se determina como el rango de valores de k para el cual el estimador de Hill es estable. Algunas consideraciones y ejemplos del gráfico de Hill pueden encontrarse en [Drees et al. \(2000\)](#).

Como se mencionó anteriormente, los estimadores de $\hat{\alpha}^{Hill}$ ó $\hat{\xi}^{Hill}$ a partir de un umbral están sujetos al balance entre sesgo y varianza. Por lo tanto, otra posible forma de encontrar el umbral óptimo es a través de la minimización del

“error cuadrático medio del estimador de Hill”, $ECM \hat{\xi}_{k,n}^{Hill}$. Beirlant et al. (2003), resumen algunas de las metodologías existentes en esta línea evidenciando un desempeño adecuado en muestras pequeñas. El ECM para un estimador $\hat{\theta}$ está dado por:

$$ECM(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \left(E(\hat{\theta} - \theta)\right)^2 + V(\hat{\theta}), \quad (2.17)$$

donde el primer componente en la parte derecha es el cuadrado del sesgo del estimador y la segunda parte corresponde a su varianza. Nótese que cuando tomamos valores pequeños de k , el estimador de Hill presenta una varianza alta mientras el sesgo es bajo y esta relación se invierte a medida que aumenta el tamaño de k . Como resultado, el ECM del estimador de Hill tiene forma de "U" cuando se gráfica con respecto a k . Hall (1990), propone la identificación de k a partir de técnicas de bootstrapping con submuestras de tamaño $n_1 < n$ dado que el sesgo del estimador no es lineal con respecto a n y por lo tanto al utilizar la muestra completa se subestima el sesgo (véase también Danielsson et al., 2001).

Finalmente, cabe mencionar algunos de los problemas que presenta el estimador de Hill. En primer lugar, no se conocen sus propiedades para muestras finitas, ya que éstas se basan en resultados asintóticos. En segundo lugar, algunas metodologías son altamente sensibles a la elección del valor inicial de k , o requieren de la elección arbitraria de ciertos parámetros. Por último, el estimador de Hill puede tener un sesgo alto incluso cuando su error cuadrático medio es mínimo, tal y como demuestran Drees et. al. (2000) y Matthys et. al. (2002).

2.4 Medidas de riesgo: VaR y ES

Asumiendo la distribución condicional y la función de distribución generalizada de Pareto para las colas (GPD) expuesta en apartados anteriores, la función de excesos de pérdidas definida en ecuación (2.8) puede ser expresada como:

$$F_{x,u}(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} \approx G_{\xi,\beta}(y), \quad (2.18)$$

donde $x = u + y$, si la condición $\lim_{u \rightarrow R_U} \sup |F_{R,u}(y) - G_{\xi,\beta}(y)| = 0$, $0 \leq y \leq R_U - u$ Balkema et al. (1974) y Pickands (1975), se cumple para un umbral u lo suficientemente grande, entonces:

$$F_{x,u}(x-u) = G_{\xi,\beta}(x-u), \quad (2.19)$$

$$F_R(x) = F(u) + G_{\xi,\beta}(x-u)[1 - F(u)], \quad (2.20)$$

para $x > u$. La expresión anterior está asociada a la cola superior de la distribución de R . Cuando F_R es conocida, el cálculo de las medidas de riesgo asociadas a esta variable aleatoria solo requiere de la estimación de los parámetros de su distribución. Sin embargo, en la práctica dicha función es desconocida, por lo que es necesario el resultado de la ecuación anterior, en la cual F_R depende de $F(u)$ y de $G_{\xi,\beta}(x-u)$.

Un estimador de $\hat{F}(u)$ es su función de distribución empírica, la cual corresponde ha $(T - N_u)/T$, donde N_u es el numero de retornos que exceden el umbral u y T el tamaño de la muestra. Reemplazando este último resultado y los estimadores de los parámetros de $G_{\xi,\beta}(x-u)$ se obtiene:

$$\hat{F}_R(x) \approx 1 - \frac{N_u}{T} \left[1 + \frac{\hat{\xi}(x-u)}{\hat{\beta}} \right]^{-1/\xi}. \quad (2.21)$$

La ecuación anterior conduce a una estimación alternativa del cuantil de $F(x)$, siendo posible construir medidas de riesgo de orden superior para el cálculo del VaR. Concretamente, el cuantil de $F(x)$, denotado por VaR_q , es:

$$VaR_q = u - \frac{\beta}{\xi} \left\{ 1 - \left[\frac{T}{N_u} (1-q) \right]^{-\xi} \right\}, \quad (2.22)$$

donde, u es el umbral, T el tamaño de la muestra, N_u el numero de retornos que exceden el umbral, y β y ξ son los parámetros de escala y forma definidos para la distribución GPD.

Por otra parte, teniendo en cuenta que el *expected shortfall* (ES) está definido como la pérdida esperada condicionada a que se supere el VaR, al sumar y restar VaR_q de la expresión anterior, tendremos que:

$$ES_q = E(r | r > VaR_q) = VaR_q + E(r - VaR_q | r > VaR_q). \quad (2.23)$$

Utilizando las propiedades de GPD, podemos demostrar que:

$$ES = E(r | r > VaR_q) = \frac{\beta + \xi(VaR_q - u)}{1 - \xi}, \quad (2.24)$$

por lo que podemos escribir el ES como:

$$ES_q = \frac{VaR_q}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi}. \quad (2.25)$$

Finalmente, dividiendo la expresión anterior por VaR_q se obtiene:

$$\frac{ES_q}{VaR_q} = \frac{1}{1 - \xi} + \frac{\beta + \xi u}{(1 - \xi)VaR_q} \quad (2.26)$$

Si la distribución de R posee colas pesadas, $0 < \xi < 1$, entonces a medida que $q \rightarrow 1$, $VaR_q \rightarrow +\infty$, la relación anterior descrita $\frac{ES_q}{VaR_q}$, estará determinada por $1/(1 - \xi)$.

Aunque existe un gran número de investigaciones en la literatura estadística y financiera que aborda la teoría de valores extremos, esta metodología presenta ventajas y desventajas las cuales deben tenerse en cuenta. Las principales ventajas de la EVT consiste en ser un método que se ajusta bien a los objetivos de análisis, es decir, los extremos de la distribución y se puede desarrollar una forma funcional a priori incorporando toda la información disponible del comportamiento de los activos en situaciones extremas del mercado, también cabe destacar que la teoría de valor extremo proporciona una aproximación más exacta y robusta para el cálculo del VaR en periodos extraordinarios o de catástrofes. Las principales desventajas de esta metodología se enmarcan en el uso parcial de la información, el análisis se concentra solo en las observaciones extremas y los resultados se basan en derivaciones asintóticas, por lo que no pueden tomarse como precisos cuando se trabaja con muestras finitas, además algunos supuestos de este tipo de modelos no siempre se cumplen en la práctica.

Capítulo 3

Cóputas

3.1 Introducción

El estudio de las cóputas se inició con los trabajos pioneros de [Hoeffding \(1940, 1947, 1948\)](#) y [Sklar \(1959\)](#). Es unos años más tarde cuando comienzan a aplicarse dentro de la literatura estadística en diversos trabajos como los de [Clayton \(1978\)](#), [Schweizer et al. \(1981\)](#) y [Genest et al. \(1986\)](#). Sin embargo, en economía y finanzas el uso de las cóputas es más reciente, encontrando numerosas investigaciones que ayudan a entender con claridad su funcionamiento y aplicación, como los trabajos [Embrechts et al. \(2002, 2003a, 2003b\)](#) y [Embrechts \(2006\)](#) en los que se presentan ejemplos interesantes de aplicación de la función cóputa. En el contexto financiero, también cabe señalar el trabajo de [Patton \(2006\)](#) en el que se introduce el concepto de cóputa condicional que tiene una gran relevancia para la modelización de las series financieras. Asimismo, en el ámbito financiero las cóputas permiten modelizar las diferentes estructuras de dependencia de un conjunto de factores de riesgos ([Días et al., 2010](#)) considerando distribuciones marginales arbitrarias.

[Embrechts et.al. \(2009\)](#) define cóputa como una distribución de variables aleatorias cuyas marginales son distribuciones uniformes, siendo un instrumento excelente para la simulación de variables aleatorias con distribuciones marginales definidas dado que solo se habrán de simular variables uniformes con estructuras de dependencia determinadas por su cóputa. Se ha demostrado en

diversas investigaciones, tales como [Embrechts et al. \(2009\)](#) y [McNeil \(2009\)](#) entre otros, que la función cópula es superior en cuanto a modelar y cuantificar la dependencia dado que ofrece mayor flexibilidad en comparación con las correlaciones. Además, se puede utilizar en la medición y/o valoración del riesgo de mercado y de crédito ya que captura la relación no lineal entre los mercados. En este sentido, cabe destacar las aplicaciones de la metodología de cópulas de [Frey et al. \(2003\)](#) y [Hamerle et al. \(2005\)](#) las cuales brindan aportaciones en la valoración de opciones financieras.

En los siguientes apartados de este capítulo se describen los resultados y propiedades básicas de las funciones cópula, los diferentes tipos de funciones cópula y la estimación de los parámetros de las mismas. Un estudio detallado de la metodología de las funciones cópula véase [Cherubini et al. \(2004\)](#), [Nelsen \(2006\)](#) y [Schweizer \(2007\)](#).

3.2 Cópulas

Definición 3.1. Una cópula n -dimensional es una función $C:[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ que cumple las siguientes propiedades para cada: $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in [0,1]^n$:

1. Si $u_j = 0$ entonces $C=(u_1, \dots, u_n) = 0$ para cada $j=1 \dots n$.
2. $C=(1, \dots, 1, u_j, 1 \dots 1) = u_j$.
3. Para cada $v=(v_1, v_2, \dots, v_n)^T \in [0,1]^n, v_j \leq u_j, V_c(u, v) \geq 0$.

Donde $V_c(u, v)$ está dado por:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} C(g_1 i_1, \dots, g_n i_n), \quad g_{j1} = v_j, g_{j2} = u_j. \quad (3.1)$$

Teniendo en cuenta estas propiedades, se puede decir que las cópulas son funciones uniformes multivariadas, crecientes y no negativas. El Teorema de [Sklar \(1959\)](#) muestra que es posible descomponer la función de distribución en sus distribuciones marginales y una cópula. Esta cópula será única si las distribuciones marginales y la multivariante son continuas. Se recomienda el estudio de la obra [Sklar \(1973\)](#), donde se muestran interpretaciones de funciones de distribución y cópulas.

Teorema 3.1

Sea F una función de distribución d -dimensional con marginales F_1, \dots, F_n , entonces existe una cópula C con: $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ para cada $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Si F_1, \dots, F_n son continuas, entonces C es única. Por otro lado, si C es una cópula y F_1, \dots, F_n son funciones de distribución, entonces la función F , definida anteriormente, es una función de distribución conjunta con marginales F_1, \dots, F_n .

Este teorema (Sklar, 1959) también admite la implicación inversa, lo cual es muy importante cuando se quieren construir modelos estocásticos considerando por separado el comportamiento univariado de los componentes de un vector aleatorio y sus propiedades de dependencia como se recoge en alguna cópula.

Teorema 3.2

Para una distribución conjunta F con marginales continuas F_1, \dots, F_n , la cópula única C para todo $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in [0, 1]^n$ está definida como:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F\{F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\}. \quad (3.2)$$

Para una cópula continua, la densidad cópula está definida por:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}. \quad (3.3)$$

De manera específica, la cópula de una variable aleatoria será definida de la siguiente forma: sea $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ un vector con distribución $X \sim F_X$ y marginales continuas $X_j \sim F_j$. La cópula de X es la función de distribución C_X de $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T \in [0, 1]^n$ donde $u_j = F_{X_j}(X_j)$:

$$C_X(u_1, \dots, u_n) = F_X\{F_{X_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{X_n}^{-1}(u_n)\}. \quad (3.4)$$

Teorema 3.3

Para variables aleatorias independientes X_1, \dots, X_n , la cópula de X es el producto definido por:

$$C_X(u_1, \dots, u_n) = F_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n F_{X_j}(x_j). \quad (3.5)$$

La ecuación (3.5) muestra cómo el producto cópula es el mismo para cualquier distribución marginal, determinando así la estructura de dependencia entre variables univariadas con marginales arbitrarias. De igual forma, para una variable aleatoria $X = (X_1, \dots, X_n)^T$, la densidad cópula c_x está dada por:

$$c_x(u_1, \dots, u_n) = \frac{f\{F_{x_1}^{-1}(u_1), \dots, F_{x_n}^{-1}(u_n)\}}{\prod_{j=1}^n f_j\{F_{x_j}^{-1}(u_j)\}}. \quad (3.6)$$

La función cópula juega un papel importante en la construcción de modelos multivariantes en el contexto económico-financiero. Además, la disponibilidad de una gran variedad de cópulas puede ser útil para la construcción de modelos estocásticos que tienen propiedades diferentes. Estos modelos son indispensables en la práctica para recoger determinados hechos estilizados de las series financieras como por ejemplo las colas pesadas, asimetrías, etc. (véase por ejemplo [Genest et al., 1986](#); [Durante et al., 2009](#); [Hofert, 2010](#) y [Czado, 2010](#)).

3.3 Tipos de funciones cópulas

En este apartado se exponen algunas consideraciones y propiedades generales que una buena familia de cópulas multivariadas deben cumplir para ser consideradas interesantes en las aplicaciones estadísticas y financieras. Siguiendo los criterios de [Embrechts \(2009\)](#); [McNeil et al. \(2009\)](#) y [Embrechts et al. \(2010\)](#) se detallan tres propiedades que resumen el análisis.

1. La Interpretabilidad: Todos los miembros de la familia cópula deben tener una interpretación probabilística que sugiere “naturales” situaciones en las que se puede considerar esta familia. Las cópulas son adecuadas para modelar situaciones en donde una perturbación común tiene consecuencias en un sistema de varios componentes (por ejemplo, carteras de crédito, vida útil del sistema, etc.).
2. El amplio y flexible rango de dependencia: Los miembros de la familia cópula deben describir los diferentes tipos de dependencia, así como la independencia cópula y uno de los límites de Fréchet-Hoeffding (caso límite en relación con el parámetro). Una propiedad deseable es tener

miembros con una variedad de dependencias de colas y asimetrías (véase Embrechts et al., 2003b).

3. Fácil de manejar: Los miembros de la familia cópula deben ser expresados en una forma cerrada o, al menos, deben ser fácilmente simulados por medio de algún algoritmo conocido. De hecho, varios procedimientos de bondad de ajuste se basan en el hecho de que la familia cópula puede ser ajustada fácilmente a la muestra (Berg, 2010).

Podemos destacar dos grandes grupos de cópulas, la familia de cópulas elípticas y las cópulas arquimediana. Las cópulas elípticas no son más que las cópulas de distribuciones elípticas que constituyen una fuente de distribuciones multivariantes que poseen muchas de las buenas propiedades de la distribución normal multivariante. La familia de cópulas arquimedianas captura una gran variedad de estructuras de dependencia. La representación arquimediana de cópulas permite reducir el estudio de una cópula multivariante a una única función univariante. Seguidamente haremos una descripción de las cópulas más importantes.

3.3.1 Familias de cópulas elípticas

Definición 3.2. Sea X un vector aleatorio n -dimensional, $\mu \in \mathbb{R}$ y Σ una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ y definida no negativa. Se dice que X tiene una distribución elíptica de parámetros (μ, Σ) y ϕ si dada la función característica de $X - \mu$ es de la forma,

$$\varphi_{X - \mu}(t) = \phi(t^T \Sigma t). \quad (3.7)$$

Denotaremos $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ como la función de distribución elíptica donde ϕ es el generador característico y Σ es una matriz diagonal, entonces X tiene componentes incorreladas si $(0 < V(X_i) < +\infty)$. Si X tiene componentes independientes entonces $X \sim N_n(\mu, \Sigma)$. Cabe destacar que la distribución normal multivariante es la única dentro de las distribuciones elípticas en la que componentes incorreladas implica componentes independientes.

La dependencia en distribuciones elípticas está esencialmente determinada por las covarianzas, las cuales son una herramienta débil para describir la dependencia en distribuciones no-Gaussianas. Las cópulas de la familia elíptica

son simétricas con distribuciones cuya densidad es constante sobre elipsoides, tal es el caso de las cópulas Gaussiana y t de Student.

La cópula Gaussiana representa la estructura de dependencia para una distribución normal multivariada, lo que significa que distribuciones marginales normales combinadas con cópula Gaussiana forman distribuciones normales multivariadas. Una expresión para la función de la cópula Gaussiana está dada por:

$$C_{\Psi}^{G_a}(u_1, \dots, u_n) = F_Y \left\{ \Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n) \right\} \quad (3.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} 2\pi^{-\frac{n}{2}} \text{abs}(\Psi)^{-\frac{n}{2}} e^{\left(-\frac{1}{2}r^T \Psi^{-1}r\right)} dr_1 \dots dr_n$$

Donde F_Y es la función de distribución normal multivariante con media cero y matriz de correlaciones Ψ , $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T \sim N_n(0, \Psi)$, $r = (r_1, \dots, r_n)^T$ y Φ^{-1} representa la función inversa de la distribución normal univariante estándar.

La utilización de la cópula Gaussiana es importante ya que tiene la capacidad de capturar el rango completo de dependencia, ya que incluye tanto las cópulas de cota superior e inferior de Fréchet como el modelo de independencia. Una desventaja de la cópula Gaussiana es que sólo captura la dependencia en el centro de la distribución y puede implicar que no se detecte la posible dependencia en las colas. Para $\rho < 1$, la dependencia en las colas es nula.

La cópula t de Student tiene gran interés dentro de la familia elíptica y contiene la estructura de dependencia para la distribución t de Student multivariante.

Definición 3.3. Si X tiene una representación estocástica $X = d\mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}Z$ donde $\mu \in \mathbb{R}$, $S \sim \chi_{\nu}^2$ y $Z \sim N_n(0, \Sigma)$ son independientes, entonces X tiene una distribución t de Student n-variante de media μ y ν ($\nu > 1$) grados de libertad.

La matriz de covarianzas estará definida por $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ para $(\nu > 2)$. Si $(\nu \leq 2)$ entonces la $Cov(X)$ no está definida. Siendo Σ definido como el parámetro de forma de la distribución de X . La función para la cópula t de Student está dada por:

$$C_{\nu, \Psi}(u_1, \dots, u_n) = t_{\nu, \Psi} \left\{ t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n) \right\}, \quad (3.9)$$

donde $t_{\nu, \Psi}$ es la función de distribución t de Student multivariante de $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T \sim t_n(\nu, 0, \Psi)$, t_ν^{-1} representa la inversa de la función de distribución t de Student univariante con ν grados de libertad.

Según se detalla en Cherubini et al. (2004), para la cópula t de Student un elevado valor de ν disminuye la probabilidad de eventos en las colas de la distribución. El coeficiente de dependencia en la cola superior (y debido a la simetría radial también en la cola inferior) viene dado por: $2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho})$. Este coeficiente es creciente en ρ y decreciente en ν , además tiende a cero cuando $\nu \rightarrow \infty$ para $\rho < 1$, convergiendo la cópula t de Student a una copula Gaussiana y para $\rho = -1$ implica extremos asintóticamente dependientes. Como es de apreciar la copula t de Student tiene mayor probabilidad de detectar eventos extremos que la cópula Gaussiana, ya que captura la dependencia en el centro y en las colas de la distribución, pero no recoge las asimetrías.

3.3.2 Familia de cópulas arquimedianas

Las cópulas arquimedianas han demostrado ser suficientemente atractivas dado que permiten considerar diferentes peculiaridades de la distribución de probabilidad. Además, por las propiedades matemáticas que otorgan esta clase de cópulas (Genest et al., 1986), son cada vez más empleadas y atractivas para la simulación, facilitando el cálculo de probabilidades y gradientes y siendo especialmente útiles en el caso de grandes dimensiones. Las cópulas arquimedianas son de especial interés en el estudio de datos empíricos de acontecimientos extremos o para distribuciones no normales porque se pueden construir fácilmente utilizando medidas de dependencia, como es el coeficiente Tau de Kendall (τ) que expondremos más adelante. Este tipo de cópulas también son conocidas como paramétricas, debido a que poseen el parámetro θ , el cual refleja el grado de dependencia. El parámetro θ puede obtenerse por medidas de concordancia dado que estas recogen las relaciones no lineales que no capta la correlación como veremos más adelante.

La función $C^n : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ es una cópula arquimediana generada por una función Ψ convexa, continua y estrictamente decreciente llamada generador que depende de un parámetro θ , del intervalo $[0,1] \rightarrow [0,\infty]$, con $\Psi(0) = \infty; \Psi(1) = 0$, y definido por:

$$C^n(u_1, \dots, u_n) = \Psi^{-1} \{ \Psi(u_1) + \dots + \Psi(u_n) \}. \quad (3.10)$$

La función continua Ψ^{-1} en el intervalo $[0, \infty)$ es completamente monótona, siendo este requisito una condición necesaria y suficiente para ampliar las cópulas arquimedianas a dimensiones mayores que dos. Según [Nelsen \(2006\)](#), las cópulas arquimedianas se describen de forma más simple que las elípticas cuando los fenómenos de estudio solo tienen dos dimensiones. Las diferentes opciones del generador Ψ proporcionan varias familias de cópulas arquimedianas. Este generador únicamente determina (hasta el múltiplo escalar) una cópula arquimediana.

Considerando el caso bidimensional, se describen a continuación algunos ejemplos de cópulas arquimedianas que han sido ampliamente utilizadas en aplicaciones financieras.

La cópula de Frank satisface patrones de dependencia simétrica y asignan probabilidad cero a eventos que están dentro de las colas. Su uso es atractivo ya que puede capturar el rango completo de dependencia; esto es, al igual que la cópula Gaussiana, la cópula Frank incluye las cópulas de cota superior de Fréchet cuando $\theta \rightarrow -\infty$, de cota inferior de Fréchet cuando $\theta \rightarrow \infty$ y de independencia cuando $\theta \rightarrow 0$. Teniendo en cuenta la función generadora $\Psi(u) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$, la forma de la cópula Frank multivariante está determinada por:

$$C_F(u_1, \dots, u_n; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right], \quad \theta \in (-\infty, \infty). \quad (3.11)$$

El uso de la cópula Frank no es recomendable para modelar dependencia de eventos extremos pues no es dependiente en la cola superior ni inferior.

Usando la función generadora $\Psi(u) = (-\ln u)^\theta$, la forma de la cópula Gumbel-Hougaard multivariante está determinada por:

$$C_{GH}(u_1, \dots, u_n; \theta) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad \theta \in [1, \infty). \quad (3.12)$$

El parámetro θ puede tomar todos los valores en el intervalo $[1, \infty]$. El coeficiente de dependencia en la cola superior viene dado por, $\lambda_u = 2 - 2^{1/\theta}$. La cópula de Gumbel-Hougaard es asimétrica y es adecuada para describir la dependencia positiva (fuerte). Según [Nelsen et al. \(2008\)](#), la cópula de Gumbel-Hougaard es la que mejor refleja la dependencia de las colas de la distribución, siendo capaz de capturar diferentes situaciones de riesgo (eventos bruscos o extremos) que se producen en los mercados financieros.

Si la función generadora es: $\Psi(u) = u^{-\theta} - 1$, tenemos la cópula de Clayton multivariante que está especificada de la siguiente manera:

$$C_C(u_1, \dots, u_n; \theta) = \left[\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1 \right]^{-1/\theta}, \quad \theta \in [-1, 0) \cup (0, +\infty). \quad (3.13)$$

El parámetro θ puede tomar todos los valores en el intervalo $[0, \infty]$. El coeficiente de dependencia en la cola inferior viene dado por, $\lambda_l = 2^{-1/\theta}$ y $\lambda_u = 0$. Según [Patton \(2009\)](#) la cópula Clayton es la más adecuada para describir la dependencia negativa ya que asigna mayor probabilidad a eventos en la cola izquierda de la distribución. Al igual que la Gumbel es una cópula asimétrica. Este tipo de cópulas es un ejemplo relevante de las cópulas arquimedianas, siendo su aplicación significativa e importante en la teoría de valor extremo multivariante.

En resumen, dependiendo del tipo de cópula seleccionada y los escenarios objeto de estudio, los resultados que se obtengan pueden ser mejores o peores, a su vez, esto dependerá del tipo de datos a utilizar, el tipo de dependencia existente o del lugar de la distribución que interese con mayor énfasis. Las medidas de dependencia, en el centro y en las colas de la distribución, pueden ser tratadas de manera separada o conjunta, de esta manera es como la función cópula puede generalizar el concepto de dependencia.

3.4 Correlación, concordancia y dependencia de las colas

3.4.1 El coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson, es la forma más tradicional utilizada para describir y cuantificar la relación de dependencia lineal entre dos o más variables aleatorias. Este mide la fuerza y dirección de una relación lineal

entre dos variables aleatorias. Por lo tanto, la estructura de correlaciones mide la tendencia de las variables cuantitativas a moverse conjuntamente. Las correlaciones, según [Clemen et al. \(1999\)](#) pueden ser consideradas como una medida base para las distribuciones elípticas.

Definición 3.4 Sean Y_1 e Y_2 variables aleatorias con varianzas finitas, entonces el coeficiente de correlación de Pearson, viene definido como:

$$Cor_{Pearson}(Y_1, Y_2) = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{Var[Y_1]}\sqrt{Var[Y_2]}} = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sigma[Y_1]\sigma[Y_2]} \quad (3.14)$$

$$= \frac{E\{(Y_1 - E[Y_1])(Y_2 - E[Y_2])\}}{\{E(Y_1 - E[Y_1])^2\}^{1/2} \{E(Y_2 - E[Y_2])^2\}^{1/2}}. \quad (3.15)$$

Entre las principales propiedades del coeficiente de correlación de Pearson se encuentra que su rango de variación está en el intervalo $[-1, 1]$, con valores ± 1 si y solo si $Y_1 = a + bY_2$. Este coeficiente es simétrico, es decir, $Cor(Y_1, Y_2) = Cor(Y_2, Y_1)$, y no cambia bajo transformaciones lineales; esto es $Cor(Y_1, f(Y_2)) = Cor(Y_1, Y_2)$ cuando $f(y) = a + by$, donde $b > 0$.

Si el coeficiente de correlación es igual a 1 ambas variables aleatorias se mueven conjuntas en la misma dirección y existe correlación positiva perfecta, si el coeficiente de correlación es igual a -1, significa que las variables se mueven en dirección opuesta y existe correlación negativa perfecta. Cuando el coeficiente de correlación es igual a cero, entonces los cambios de una de las variables están incorrelacionados de los cambios de la otra, y viceversa. Si tomara cualquier otro valor dentro del intervalo $(-1, 1)$ existiría dependencia lineal imperfecta.

El coeficiente de correlación de Pearson se usa frecuentemente como medida de dependencia lineal, pues es más fácil de calcular y es un parámetro importante en distribuciones elípticas. De hecho, a menudo se emplea en la familia normal multivariante y en la distribución t de Student multivariante. Sin embargo, para algunos casos de variables aleatorias continuas cuyas distribuciones no son elípticas, como es el caso de distribuciones construidas con ciertas cópulas ([Embrechts et al., 2010](#)), la utilidad de este coeficiente es escasa dado que su valor depende no solo de la cópula sino también de las marginales: $Cor(f(Y_1), f(Y_2)) \neq Cor(Y_1, Y_2)$ cuando $f(y)$ no es lineal. Es decir, esta medida no siempre es invariante al reescalamiento, siendo una medida no apropiada cuando hay existencia de colas anchas y asimetría.

Las correlaciones pueden tener errores cuando son utilizadas para capturar dependencia en situaciones extremas o anormales (Embrechts et al., 2002).

3.4.2 Medidas de concordancia

Definición 3.5. Dadas dos parejas aleatorias (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) con marginales idénticas, se dice que (X_2, Y_2) es más concordante que (X_1, Y_1) , y se denota por $(X_1, Y_1) \prec (X_2, Y_2)$, si $P_r \{X_1 \leq s, Y_1 \leq t\} \leq P_r \{X_2 \leq s, Y_2 \leq t\}$ para toda $s, t \in \mathbb{R}$.

Al considerar una pareja de variables aleatorias, es útil conocer la propensión asociados cuando toman valores grandes simultáneamente y, del mismo modo, cuando toman valores pequeños. Una idea intuitiva de este grado de asociación se explica en Yanagimoto et al. (1969), quienes proponen el uso del orden de concordancia de distribuciones bivariadas con marginales univariadas dadas de acuerdo con la fuerza de su asociación positiva, el cual se denota por “ \prec ”. Es importante señalar que el uso de las medidas de concordancia permiten construir estimaciones fiables cuando se asume que la cópula pertenece a una familia paramétrica específica (Embrechts et al., 2006). El término medida de asociación se refiere a una medida de concordancia, un concepto desarrollado por Scarsini (1984) y presentado por Nelsen (1999) como se define a continuación.

Una medida numérica k de asociación entre dos variables aleatorias continuas Y_1 y Y_2 , cuya cópula es C , es una medida de concordancia si satisface las siguientes propiedades:

1. k está definida para cualquier pareja de variables aleatorias continuas.
2. $k \in [-1, 1]$ con $k(Y, Y) = 1$ y $k(Y, -Y) = -1$.
3. $k(Y_1, Y_2) = k(Y_2, Y_1)$.
4. si Y_1 y Y_2 son independientes entonces $k(Y_1, Y_2) = 0$.
5. $k(-Y_1, Y_2) = k(Y_1, -Y_2) = -k(Y_1, Y_2)$.

6. si dos parejas aleatorias están representadas por las cópulas C_1 y C_2 de manera tal que $C_1 \prec C_2$, y si k_i denota la medición de concordancia correspondiente a la cópula C_i , donde $i = 1, 2$, entonces $k_1 \leq k_2$.

7. si $\{Y_n\}$ es una sucesión de parejas aleatorias continuas con cópula C_n y medida de concordancia k_n y si $\{C_n\}$ converge a C cuya medida de concordancia es k , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k$.

En la literatura estadística se describen dos medidas de asociación muy importantes, la Tau de Kendall τ y el coeficiente Rho de Spearman ρ . Estas medidas satisfacen la definición de concordancia y serán descritas seguidamente.

El coeficiente de correlación de rangos de Kendall, más conocido como Tau de Kendall, fue redescubierto y desarrollado independientemente por [Kendall \(1938\)](#) y fue discutido por primera en los trabajos de [Kruskal \(1958\)](#) dando respuesta a una medida similar en el contexto de series de tiempo.

Definición 3.6. Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, tales que $(X_i, Y_i) \sim F$, $i=1,2$. Entonces, la τ de Kendall se define como la diferencia entre la probabilidad de concordancia y la de discordancia.

Según [Nelsen \(2001\)](#), la definición anterior puede expresarse como:

$$\tau = \frac{c-d}{c+d} = (c-d) / \binom{n}{2}, \quad (3.16)$$

donde n es el número total de observaciones de una muestra aleatoria, c es el número de pares concordantes y d los pares discordantes.

La τ de Kendall para una pareja de variables aleatorias continua (Y_1, Y_2) , dada en términos de la cópula C , puede expresarse como:

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C(v_1, v_2) dC(v_1, v_2) - 1. \quad (3.17)$$

La ecuación anterior indica que la τ de Kendall está completamente determinada por la cópula C y no está relacionada con las distribuciones marginales de (Y_1, Y_2) .

El coeficiente de correlación de rangos de Spearman, más conocido como Rho de Spearman, fue discutido por primera vez por [Spearman \(1904\)](#). La ρ de Spearman puede ser definida como el coeficiente de correlación de Pearson, pero no aplicada a las variables aleatorias (Y_1, Y_2) , sino a sus rangos $V_1 = F_1(Y_1)$ y $V_2 = F_2(Y_2)$.

Definición 3.7. Sean (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) y (X_3, Y_3) vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuidos, tales que $(X_i, Y_i) \sim H$, $i=1,2,3$. La ρ de Spearman se define como:

$$\rho = 3 \left[P_r \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) \geq 0 \} - P_r \{ (X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0 \} \right]. \quad (3.18)$$

Es decir, el coeficiente ρ es proporcional a la diferencia entre las probabilidades de concordancia y discordancia entre los vectores aleatorios (X_1, Y_1) y (X_2, Y_3) y claramente (X_2, Y_3) puede ser sustituido por (X_3, Y_2) . Las variables aleatorias V_1 y V_2 son uniformes en $I=[0,1]$; además $E(V_1) = E(V_2) = 1/2$ y $Var(V_1) = Var(V_2) = 1/12$. Si C es la función de distribución conjunta de U y V , como se especifica en la cópula, entonces se tiene que,

$$\rho = 12E[V_1V_2] - 3 = 12 \iint_{I^2} v_1v_2 dC - 3. \quad (3.19)$$

$$\rho = 12 \iint_{I^2} [C(v_1v_2) - v_1v_2] dv_1dv_2. \quad (3.20)$$

Como consecuencia, la ρ de Spearman es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de X_i y Y_i , una propiedad que comparte con la τ , pero no con el coeficiente de correlación de Pearson.

3.4.3 Dependencia de las colas de la distribución

La dependencia de las colas de la distribución multivariante describe el comportamiento de las colas cuando los valores de sus marginales llegan a cero (lower tail) o a la unidad (upper tail), permitiendo así identificar la dependencia de los valores extremos de las variables aleatorias. La dependencia de colas es un concepto útil para describir la estructura de dependencia en las series financieras, sobre todo en valores extremos (véase Embrechts et al., 2003b). La dependencia de colas entre dos variables financieras existe cuando la probabilidad de eventos extremos (negativos o positivos) conjuntos es mayor que la que debería de acuerdo con la predicción dada por las distribuciones marginales.

Definición 3.8. Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta F , cópula C y marginales F_X y F_Y . Si existiera una relación positiva entre dos situaciones extremas con respecto a las variables aleatorias X e Y , su probabilidad condicional estaría dada por,

$$\lambda_u(\alpha) = P\left[X > F_x^{-1}(1-\alpha) \mid Y > F_y^{-1}(1-\alpha)\right] \quad (3.21)$$

y decrecería tal como $\alpha \downarrow 0$. El coeficiente de dependencia de cola superior, λ_u , entre X y Y vendrá dado por,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \lambda_u(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P\left[X > F_x^{-1}(1-\alpha) \mid Y > F_y^{-1}(1-\alpha)\right], \quad (3.22)$$

siempre y cuando el límite λ_u exista.

El coeficiente λ_u mide la dependencia de cola superior entre valores extremos de X y Y , por lo que estas dos variables serán asintóticamente dependientes si $\lambda_u \in (0,1]$ y asintóticamente independientes o no existirá dependencia de cola superior si $\lambda_u = 0$. En términos financieros se denota a la función $F^{-1}(1-\alpha)$ como el valor en riesgo, entonces la función λ_u captura la dependencia relacionada con los periodos de tensión. De forma similar, en el caso de que existiera una relación entre dos acontecimientos negativos y extremos con respecto a las variables aleatorias X e Y la probabilidad condicional estaría dada por,

$$\lambda_l(\alpha) = P\left[X < F_x^{-1}(\alpha) \mid Y < F_y^{-1}(\alpha)\right]. \quad (3.23)$$

El coeficiente de dependencia de cola inferior λ_l (izquierda) entre X y Y vendrá dado por,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \lambda_l(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P\left[X < F_x^{-1}(\alpha) \mid Y < F_y^{-1}(\alpha)\right]. \quad (3.24)$$

En el caso de distribuciones continuas, estas medidas de dependencia superior derecha λ_u o inferior izquierda λ_l de las colas pueden ser expresadas en términos de una cópula adecuada, C , asociada a la distribución bivariadas de estas variables, donde λ_u y λ_l vendrán dadas por:

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{C(u, u)}{1-u}, \quad (3.25)$$

$$\lambda_l = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{C(u, u)}{u}, \quad (3.26)$$

siempre y cuando exista tales límites, existirá la dependencia de cola superior o inferior entre las variables, $\lambda_u, \lambda_l \in (0,1]$, y se dará la independencia cuando $\lambda_u, \lambda_l = 0$.

Desde el punto de vista financiero, es importante considerar tanto la cola izquierda como la derecha de la distribución, debido a que la cola izquierda

representa pérdidas cuando un inversor se encuentra en una posición larga en un activo, mientras que la cola derecha también representa pérdidas cuando el inversor mantiene una posición corta en el activo. Estas medidas son invariantes a transformaciones estrictamente crecientes debido a que se expresan a través de la cópula.

Como habíamos definido en apartado anterior una de las desventajas de la cópula Gaussiana era que para $\rho < 1$, la dependencia en las colas era nula, es decir $\lambda_u = \lambda_L = 0$ y cuando $\rho = 1$, entonces $\lambda_u = \lambda_L = 1$. Quedando así la dependencia en colas definido por:

$$\lambda_u(X, Y) = \lambda_l(X, Y) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi \left(x \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right) = 0. \quad (3.27)$$

Para la cópula t de Student, el coeficiente de correlación de la dependencia de colas está definido por:

$$\lambda_u(X, Y) = \lambda_l(X, Y) = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\nu+1} \frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}} \right). \quad (3.28)$$

Como se ha mencionado, la cópula de Frank no tiene dependencia de cola superior e inferior, por tanto, $\lambda_u = \lambda_L = 0$. Para la cópula Gumbel el coeficiente de la cola inferior es nulo, es decir, $\lambda_l(X, Y) = 0$ y el coeficiente de la cola superior λ_u presenta dependencia, definido por,

$$\lambda_u(X, Y) = 2 - 2^{1/\theta}. \quad (3.29)$$

Para la cópula Clayton el coeficiente de la cola superior λ_u es nulo, $\lambda_u(X, Y) = 0$ y el coeficiente de la cola inferior λ_l es dependiente para $(\theta > 0)$, siendo definido por,

$$\lambda_l(X, Y) = 2^{-1/\theta} \quad (3.30)$$

3.5 Métodos de estimación del parámetro de dependencia

En la literatura estadística existen dos grandes enfoques para la estimación del parámetro de dependencia que se diferencian por los supuestos paramétricos o no paramétricos utilizados para las distribuciones marginales desconocidas, Genest et al. (1995).

Supongamos una cópula que pertenece a una familia paramétrica $\{C_\theta, \theta \in \Theta\}$, con Θ el espacio de posibles valores del parámetro, considerando el

método de máxima verosimilitud (ML) se obtendrán estimadores de $\theta \in \Theta$ consistentes y asintóticamente normales. Genest et al. (1995) y Shih y Louis (1995) describen una adaptación a la inferencia realizada sobre el parámetro de dependencia basada exclusivamente en rangos. El método de máxima pseudo-verosimilitud o también llamado máxima verosimilitud canónica (MLC) requiere que C_θ sea continua con densidad c_θ y maximiza el logaritmo de la verosimilitud de la forma,

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left(c_\theta \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right). \quad (3.31)$$

La expresión anterior se obtiene sustituyendo las marginales desconocidas F_x y F_y en la verosimilitud clásica por sus contrapartidas empíricas $F_{emp}(x)$ y $F_{emp}(y)$. A partir de las distribuciones empíricas marginales $F_{emp}(x)$, $F_{emp}(y)$ y la representación canónica de la cópula $H(x, y) = f_1(x)f_2(y)c(F_{emp}(x_i), F_{emp}(y_i))$, con $c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$ como la función de densidad de la cópula C , la función de verosimilitud queda definida como:

$$\ell(\theta; u, v) = \prod_{i=1}^n c(u_i, v_i), \quad (3.32)$$

donde $u_i = F_{emp}(x_i)$ y $v_i = F_{emp}(y_i)$.

La estimación del parámetro de dependencia θ queda como:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{i=1}^n \ell(\theta; u_i, v_i). \quad (3.33)$$

En Genest et al. (1995) y Shih y Louis (1995) se demuestra que el estimador de θ es consistente y asintóticamente tiene distribución normal bajo condiciones de regularidad similares a las impuestas en el método de máxima verosimilitud.

Por otra parte, Joe y Xu (1996) proponen un método alternativo para modelos multivariantes denominado “inferencia para las marginales” (IFM). Este método consta de dos partes: (a) estimación de los parámetros de las distribuciones marginales de forma separada utilizando ML; (b) estimación de los parámetros de dependencia de una cópula paramétrica resolviendo el siguiente problema:

$$\theta = \arg \max_{\theta} \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_t, \hat{v}_t; \theta), \quad (3.34)$$

donde $\hat{u}_t = F_X(x_t; \hat{\alpha}_x)$ y $\hat{v}_t = F_Y(y_t; \hat{\alpha}_y)$.

Joe (1997) demuestra que bajo condiciones de regularidad estándar, esta estimación en dos etapas es consistente y las estimaciones de los parámetros son asintóticamente eficientes y normales. Como ilustra Joe (2005), sin embargo, la ganancia en la conveniencia computacional de este método se produce a expensas de la eficiencia. Kim et al. (2007) muestran que una elección inapropiada de los modelos para los márgenes puede tener efectos perjudiciales en la estimación del parámetro de dependencia.

3.6 Contrastes de bondad de ajuste

La selección de una cópula para ajustar un conjunto de datos es un tema de vital importancia. En la literatura estadística se han propuesto diversos métodos para la selección de una cópula. Los contrastes se pueden realizar aplicando directamente el ajuste de las cópulas mediante pruebas de bondad de ajuste tradicionales, tales como el test de Kolmogorov-Smirnov y el test de Anderson-Darling, consiguiendo así buenos resultados. Este apartado pretende realizar una breve revisión y descripción de los principales contrastes de bondad de ajuste definidos por varios investigadores en la literatura estadística.

Genest y Rivest (1993) propusieron un procedimiento no paramétrico que sin tomar en cuenta las marginales estima la función que determina una cópula arquimediana. Este procedimiento representa una estrategia para seleccionar la familia paramétrica de cópulas arquimedianas que provee el mejor ajuste posible para un conjunto de datos. Wang y Wells (2000) proponen una técnica similar de selección de cópulas arquimedianas para modelar las funciones de supervivencia en presencia de datos con censura. Según Barbe et al. (1996) este test es llamado transformación de Kendall, siendo una transformación afín de la versión multivariante del coeficiente de concordancia de Kendall. Otra forma de evaluar si conviene un modelo en particular consiste en el análisis de residuos, propuestos por Dunn-Smyth (1996), los cuales pueden ser graficados de diversas formas, y decidir visualmente si el ajuste es el adecuado.

Fermanian et al. (2004) y Tsukahara (2005) proponen un test de bondad de ajuste basado en el proceso empírico, dando varias condiciones bajo las cuales C_n , o ligeras variantes de los mismos es un estimador consistente de la

verdadera cópula C , es decir, si H_0 es cierto o no. El test consiste en la comparación entre la cópula C_n y un estimador C_{θ_n} de la cópula C obtenido bajo la hipótesis nula, de la forma $\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C_{\theta_n})$. [Ané y Kharoubi \(2003\)](#) también muestran este método de selección basado en comparaciones paramétricas y no paramétricas a través de un estimador de distancia. [Fermanian \(2005\)](#), considera este test poco práctico, excepto que se utilice bootstrapping.

[Huard et al. \(2006\)](#) proponen también un método bayesiano basado en la τ de Kendall para seleccionar la cópula más probable de las dadas en un conjunto. [Genest et al. \(2006\)](#) consideran dos estadísticos específicos de rango análogos al estadístico de Cramer-von Mises y Kolmogorov-Smirnov, definidos como: $S_n^{(K)} = \int_0^1 K_n(\nu)^2 dK_{\theta_n}$ y $T_n^{(K)} = \sup_{\nu \in [0,1]} |K_n(\nu)|$. Es importante señalar que, valores grandes para estos estadísticos dan lugar al rechazo de H_0 , donde: $H_0 : K \in \kappa_0 = \{\kappa_0 : \theta \in \Theta\}$. Los p-valores pueden deducirse de sus distribuciones límite que dependen del comportamiento asintótico de K_n . La convergencia de este último se establece por [Genest et al. \(2006\)](#) bajo condiciones de regularidad adecuadas en las familias paramétricas C_0, κ_0 y la secuencia θ_n de los estimadores. Estos dos estadísticos también utilizan la conocida transformación de Kendall. [Genest et al. \(2009\)](#) afirma que el procedimiento basado en $S_n^{(K)}$ es muy superior y ofrece el mejor rendimiento cuando se prueba la bondad de ajuste de cópulas Gumbel-Hougaard y Frank.

[Breyman et al. \(2003\)](#) y [Dobric-Schmid \(2007\)](#) presentan una prueba de bondad de ajuste basada en la transformación de [Rosenblatt \(1952\)](#), contrastando H_0 con el estadístico de Anderson-Darling. Este procedimiento no resulta efectivo y ni siquiera mantiene su nivel nominal. [Dobric-Schmid \(2007\)](#) argumenta una versión corregida a la de [Breyman et al. \(2003\)](#), la cual presenta algunas limitaciones. Cuando las marginales son especificadas, esta prueba funciona bien, pero cuando éstas son estimadas empíricamente, la prueba no resulta útil. Por último, si se utiliza la aproximación paramétrica de máxima verosimilitud, un criterio suplementario para examinar la bondad de ajuste de los modelos es el basado en la comparación de los valores negativos de las funciones de verosimilitud. [Akaike \(1973, 1977\)](#) desarrolla una medida de decisión basada en la medida de información de [Leibler \(1951\)](#), dado que esta

medida proporciona un criterio de ordenación de modelos estocásticos alternativos. El criterio de información de Akaike estará definido como: $AIC = 2(-\log \ell(\theta; u_i, v_i)) + 2q$.

Seguidamente se describen los contrastes de Kolmogorov-Smirnov y Anderson-Darling que son considerados los contrastes más tradicionales de bondad de ajuste. Se basan en una comparación directa de la dependencia supuesta por la cópula y la observada en la base de datos a estudiar.

El Contraste de Kolmogorov-Smirnov (KS) es un contraste no paramétrico aplicable únicamente a variables continuas. Utiliza una idea similar al contraste chi-cuadrado de Pearson, pero en vez de comparar las probabilidades de diversos sucesos, compara los valores de las funciones de distribución para la muestra y para la que teóricamente se derivaría de la población que se ha explicitado en la hipótesis nula. El estadístico de Kolmogorov-Smirnov se define como la máxima distancia observada entre ambas funciones de distribución, probando que no hay diferencias significativas entre ambas distribuciones. La prueba de Kolmogorov-Smirnov se define como:

$$H_0 : F_n(x_t) = F_0(x_t), H_1 : F_n(x_t) \neq F_0(x_t),$$

y el estadístico de contraste es:

$$D_n^{KS} = \max_t (F_n(x_t) - F_0(x_t)), \quad (3.35)$$

donde $F_0(x_t)$ es la distribución que se supone sigue la muestra aleatoria (distribución teórica) y $F_n(x_t)$ es la función de distribución empírica considerando n observaciones. En este contraste interesa la desviación máxima entre la función de distribución teórica y la empírica para todo el rango de valores de x . El valor de $F_n(x_t)$ se debe comparar con unas tablas específicas de este estadístico, pues no sigue ninguna distribución conocida, (ver [Stephens \(1974\)](#)). Para tamaños muestrales, n superiores a 100, el valor crítico puede obtenerse mediante: $\sqrt{-\ln(\alpha/2)/2n}$, siendo $1-\alpha$ el nivel de confianza. Lógicamente, se rechaza la hipótesis nula si el estadístico toma un valor superior al de las tablas. Bajo la hipótesis nula la muestra es extraída de la población considerada en dicha hipótesis nula, por lo que las funciones de distribución muestral y teórica serían tan similares que, incluso tomando su máxima distancia, ésta sería suficientemente reducida. Cuando el valor numérico del estadístico excede del valor crítico de las tablas, se considera que no es

suficientemente reducido, constituyendo evidencia en el sentido de que las funciones de distribución difieren una de otra y, por ello, la hipótesis nula debe rechazarse.

La distribución del estadístico de Kolmogorov-Smirnov es independiente del tipo de distribución de la que fue extraída la muestra, lo cual es interesante, pues nos permite utilizar una única tabla de valores críticos para este estadístico; de lo contrario, deberíamos tener una tabla para cada tipo de distribución de probabilidad F incluida en H_0 . Este contraste puede utilizarse asimismo con distribuciones de tipo discreto, pero entonces sólo podemos decir que α es el máximo nivel de significación del contraste que hayamos diseñado. Para aplicar el contraste con distribuciones continuas es preciso agrupar sus valores en clases o intervalos, con lo que se pierde cierta información. Al utilizar únicamente la información muestral incorporada en la máxima distancia entre las funciones de distribución, este estadístico ignora mucha información muestral, a diferencia del Contraste Chi-cuadrado de Pearson.

El estadístico de Kolmogorov-Smirnov puede utilizarse para construir bandas de confianza para una distribución teórica desconocida $F(x_i)$, a partir de una distribución empírica. Para ello, fijado un valor de α , tomamos de la tabla el valor crítico D_n^{KS} correspondiente a α y n , el tamaño muestral del que se dispone. El extremo superior $F_s(x_i)$ de la banda para $F(x_i)$ se construye sumando D_n^{KS} a la función de distribución empírica, hasta que se alcanza el nivel 1, permaneciendo entonces en éste. El nivel inferior $F_l(x_i)$ es igual a cero hasta que la distribución empírica llega a ser igual o mayor a D_n^{KS} . Calculando la mayor desviación existente entre las dos funciones de distribución denotado por D_n^{KS} el estadístico para la cola derecha e izquierda vendrá dado por:

$$D_n^{KS+} = \max_t (F_n(x_t) - F_0(x_t)), \quad (3.36)$$

$$D_n^{KS-} = \max_t (F_0(x_t) - F_n(x_t)). \quad (3.37)$$

Por tanto, el estadístico de Kolmogorov-Smirnov será el máximo de los dos, es decir:

$$D_n^{KS} = \max \{D_n^{KS+}, D_n^{KS-}\}. \quad (3.38)$$

El contraste de Kolmogorov-Smirnov puede presentar varias limitaciones importantes, ya que sólo se aplica a distribuciones continuas, se tiende a tener

mayor sensibilidad con los valores cerca del centro de la distribución que en las colas. Tal vez la limitación más grave es que la distribución debe ser completamente especificada; es decir, si los parámetros de ubicación, escala y forma se estiman a partir de los datos, la región crítica de la prueba de KS no es válida, siendo por lo general determinado por la simulación. Debido a estas anteriores limitaciones, muchos analistas prefieren utilizar el contraste de bondad de ajuste de Anderson-Darling.

El contraste de Anderson-Darling (AD) es un contraste no paramétrico que se utiliza para contrastar si una muestra de los datos observados procede de una población con una distribución específica $F_0(x_i)$. Esta prueba es una modificación del contraste de Kolmogorov-Smirnov donde se le da mayor peso a las colas de la distribución que en la prueba de Kolmogorov-Smirnov. La prueba de Anderson-Darling se define como:

$$H_0 : F_n(x_i) = F_0(x_i), \quad H_1 : F_n(x_i) \neq F_0(x_i),$$

y el estadístico de contraste es:

$$D_n^{AD} = \max_t \frac{|F_n(x_t) - F_0(x_t)|}{\sqrt{F_0(x_t)(1 - F_0(x_t))}}. \quad (3.39)$$

El estadístico D_n^{AD} determina si los datos ordenados $\{X_1 < X_2 < \dots < X_n\}$ vienen de una distribución con función de distribución $F(x_i)$.

Los valores críticos para la prueba Anderson-Darling, dependen de la distribución específica que se está probando. Esto tiene la ventaja de permitir un análisis más sensible en los valores extremos de la distribución (colas), y la desventaja de que los valores críticos deben calcularse para cada distribución. Los valores críticos del estadístico D_n^{AD} y sus fórmulas se encuentran tabulados. El contraste es una prueba de un solo lado y la hipótesis de que la distribución es de una forma específica se rechaza si el estadístico de prueba es mayor que el valor crítico. En el análisis hay que tener en cuenta que para una distribución dada, el estadístico de Anderson-Darling puede ser multiplicado por una constante (que por lo general depende del tamaño de la muestra, n). Estas constantes se dan en los distintos trabajos de Stephens. Además, hay que tener en cuenta que las constantes son diferentes y por lo tanto los valores críticos.

Capítulo 4

Las fluctuaciones en el precio de los alimentos y del dólar americano

4.1 Introducción

Las investigaciones recientes sobre el aumento de los precios de los alimentos en los años 2008 y 2011 han puesto de manifiesto que el tipo de cambio del dólar americano es un factor relevante para explicar los movimientos de precios de los alimentos, identificándolo como un mecanismo a través del cual se transmiten ciertos acontecimientos macroeconómicos a los precios de los alimentos (Véase [Abbott et al., 2011](#); [Gilbert, 2010](#)).

Las explicaciones en la literatura sobre la relación inversa entre el precio de los alimentos y el valor del dólar americano se basan en la ley del precio único para los bienes comercializables. Dado que el precio de los alimentos se fija en dólares en los mercados internacionales de alimentos, el precio en dólares de los alimentos debe aumentar para compensar la depreciación del dólar, lo que reduce el precio de los alimentos en otras divisas y el aumento del poder adquisitivo y la demanda de alimentos de los consumidores extranjeros. Los resultados empíricos existentes estiman que la depreciación del dólar aumenta la elasticidad de precio de las materias primas entre 0,5 y 1 ([Gilbert, 1989](#)). El aumento de los precios de los alimentos derivados de la depreciación del dólar ha sido estimada en torno al 20% ([Mitchell, 2008](#)). A partir de un análisis de los

picos de precios de los alimentos, [Abbott et al. \(2009\)](#) concluyó que la debilidad del dólar supone alrededor del 50% del aumento total. El grado de impacto de las variaciones del tipo de cambio del dólar en el precio de los alimentos depende de la relación de dependencia entre el tipo de cambio del dólar y el precio de los alimentos.

La mayoría de los estudios empíricos han examinado el impacto de la debilidad del dólar en los precios de los productos básicos agrícolas en un contexto general y teniendo en cuenta la influencia de otras variables. Por ejemplo, la inflación en el mercado de alimentos de los EE.UU. se explica igualmente por los precios de la energía y tasas de cambio de acuerdo con los análisis de [Harri et al. \(2009\)](#), [Kwon y Koo \(2009\)](#) y [Baek y Koo \(2010\)](#). Recientemente, [Nazlioglu y Soytas \(2012\)](#) han examinado la relación entre los precios del petróleo, tipos de cambio y los precios de los productos agrícolas, confirmando el impacto positivo que tiene de la debilidad del dólar en los precios agrícolas. El efecto de los precios del crudo en los precios de los alimentos también ha sido examinado por [Gohin y Chantret \(2010\)](#) y por [Reboredo \(2012a\)](#), si bien estos estudios no se centran de forma específica en el papel que tiene el tipo de cambio en la determinación del precio de los alimentos. Por otro lado, dada la coincidencia entre elevados precios de las materias primas, tipos de interés reducidos y depreciaciones significativas del dólar, [Akram \(2009\)](#) analiza el efecto conjunto de estas tres variables sobre el precio de los alimentos y encuentra que: (i) las tasas de interés reales fueron responsables de aumentos en los precios de alimentos, (ii) existe un efecto significativo de los shocks en los tipos de cambio del dólar en las fluctuaciones en el precio de los alimentos. Del mismo modo, [Vansteenkiste \(2009\)](#) y [Lombardi et al. \(2010\)](#) encontraron evidencia de que las tasas de cambio y tasas de interés reales son importantes para explicar los precios de las materias primas. Además, [Gilbert \(2010\)](#) explica el reciente aumento de los precios de los alimentos, distinguiendo entre factores comunes y específicos de mercado, proporcionando evidencia a favor de los factores comunes, como las tasas de cambio, y en contra de determinados factores de mercado, como los precios del petróleo y la demanda de biocombustibles.

Aunque la evidencia empírica existente sobre el impacto del dólar en los movimientos de precios de los alimentos proporciona evidencia sobre la

importancia del valor de esta moneda en la explicación de los cambios de precios de alimentos, ningún estudio ha examinado la estructura de dependencia entre el dólar y el precio de los alimentos; es decir, no se ha presentado evidencia sobre la forma en que el dólar y el precio de los alimentos se mueven conjuntamente. El comovimiento entre el dólar y el precio de los alimentos tiene implicaciones importantes para países en desarrollo y desarrollados por igual, ya que la volatilidad de precios de los alimentos y los desequilibrios en la balanza de alimentos están sujetos a los shocks del dólar, lo cual determina el diseño y efectividad de las políticas de un país con respecto al precio de los alimentos. Por otra parte, el análisis de este comovimiento es de interés para los productores de alimentos y los inversores, ya que tiene profundas implicaciones para las estrategias de cobertura de riesgo de precio para los productores y para los inversores que operan en el mercado de alimentos, sobre todo teniendo en cuenta que el mercado de alimentos, al igual que otros mercados de materias primas, está experimentando un enorme grado de financialización (ver [Tang y Xiong, 2010a](#)). Así, al estudiar el comovimiento del dólar y el precio de los alimentos la evidencia empírica sobre esta relación de dependencia se extiende en dos sentidos.

En primer lugar, a través del uso de funciones cópula se estudió la estructura de dependencia entre el dólar y los principales productos básicos de alimentación (maíz, soja, trigo y arroz). Las funciones cópula pueden proporcionar información tanto sobre la dependencia media y la dependencia de cola superior e inferior (movimientos conjuntos extremos) entre el dólar y el precio de los alimentos, lo que nos permite evaluar el posible impacto de la divisa americana en el precio de los alimentos en condiciones de mercado diferentes. De forma específica, nuestro objetivo es dar respuesta a las siguientes cuestiones: ¿Cuál es la estructura de dependencia entre el dólar y los mercados de alimentos? ¿Hay alguna dependencia entre los valores extremos? ¿Hay alguna respuesta asimétrica en los precios de los alimentos a cambios extremos en el valor del dólar? ¿Ha cambiado la relación de dependencia a lo largo de los últimos años? Al dar respuesta a estas cuestiones esperamos mejorar la comprensión de la relación entre el dólar y el precio de los alimentos y determinar si los mercados de alimentos y de divisas son dependientes o no en diferentes circunstancias de mercado, determinando así si el dólar fue o no el

responsable de los picos en el precio de los alimentos observados en los últimos años.

En segundo lugar, dado los crecientes flujos de inversión en los mercados de productos alimenticios y el proceso de financialización de estos mercados, el conocimiento de comovimiento entre el dólar y el precio de los alimentos es útil para los gestores de cartera que buscan la diversificación de la misma así como la protección de su inversión frente al riesgo a la baja en el precio los alimentos. Algunos autores han examinado los beneficios de la diversificación de los productos básicos desde diferentes puntos de vista. [Gorton y Rouwenhorst \(2006\)](#) estudiaron los comovimientos de mercado de los productos básicos con respecto a las acciones y bonos; [Erb y Harvey \(2006\)](#) encontraron que distintos productos básicos tenían poca correlación de precios entre sí, mientras que [Bessembinder \(1992\)](#) y [de Roon et al. \(2000\)](#) analizaron el efecto de la presión de las estrategias de cobertura sobre las primas de riesgos en futuros agrícolas. En este capítulo estudiamos las implicaciones de dependencia promedio y de cola de los precios de los alimentos y el dólar americano. Con esta finalidad, se evaluó la importancia del dólar en la gestión de riesgos de precios de alimentos al comparar el riesgo de un cartera compuesta por alimentos y dólar frente al riesgo de un cartera configurada únicamente de alimentos, evaluando por medio del valor en riesgo (VaR) si un inversor puede lograr beneficios en términos de reducción de riesgos al considerar el dólar en su cartera.

Nuestro estudio empírico de la estructura de dependencia para el USD con los mercados de maíz, soja, trigo y arroz abarca el período de enero 1998 a octubre 2012. Las distribuciones marginales de las series de variaciones de precios fueron modelizadas utilizando un modelo (ARMA-TGARCH), mientras que la relación de dependencia se ha caracterizado utilizando diversas especificaciones para las funciones cópulas: con independencia de cola, con dependencia simétrica y asimétrica de cola y con dependencia variable en el tiempo. La evidencia empírica obtenida indica que la dependencia media es positiva y reducida, con independencia de cola, para el dólar y el maíz y el trigo, mientras que existe independencia promedio y de cola con el arroz. Estos resultados confirman que el alza en los precios de estos alimentos no fue provocado por una pérdida extrema en del valor del dólar. Sin embargo, la evidencia obtenida para la soja indica que la dependencia media fue positiva y

significativa, mientras que la dependencia de cola fue asimétrica, siendo únicamente significativa la dependencia en la cola superior. Este resultado apunta a que la depreciación del dólar ha contribuido a formar los picos alcistas de los precios de la soja. En cuanto a las consecuencias de los vínculos entre el precio de los alimentos y la depreciación del dólar para la gestión de riesgos, se proporciona evidencia de la utilidad de incluir al dólar en una cartera de inversión en alimentos dado que, en comparación con una cartera compuesta únicamente por alimentos, hay evidencia de cobertura, eficacia en la reducción de riesgo de la cartera y una reducción VaR y un mejor rendimiento en términos de la función de pérdida del inversor.

El resto del capítulo se organiza de la siguiente forma: en la sección 4.2 planteamos la metodología cópula y describimos los modelos marginales y de cópula. En las secciones 4.3 y 4.4 se presentan los datos y resultados empíricos, respectivamente. En la sección 4.5 se discuten las implicaciones de precios de alimentos para la gestión de riesgos y en la sección 4.6 se presentan las conclusiones del estudio.

4.2 Metodología

El estudio de la estructura de dependencia entre el dólar y el precio de los alimentos requiere de la caracterización de la función de densidad multivariante entre las dos variables de interés. La función cópula es una función multivariante que relaciona los cuantiles de las funciones de distribución marginales. Dadas dos variables aleatorias continuas X e Y con funciones de distribución marginales $u = F_X(x)$ y $v = F_Y(y)$, respectivamente, la cópula, C , es una función de u y v , $C(u,v)$, que toma valores en $[0,1]$. El Teorema de [Sklar \(1959\)](#) afirma que la cópula y la distribución multivariante conjunta de X e Y , $F_{XY}(x,y)$, están relacionadas, por lo tanto $F_{XY}(x,y) = C(u,v)$. De manera similar, la cópula condicional está relacionada con la densidad condicional multivariada ([Patton, 2006](#)):

$$F_{XY|W}(x,y | w) = C\left(F_{X|W}(x | w), F_{Y|W}(y | w) | w\right), \quad (4.1)$$

donde W es la variable condicionada, $F_{X|W}(x | w)$ es la distribución condicional de $X | W = w$, $F_{Y|W}(y | w)$ es la distribución condicional de $Y | W = w$ y $F_{XY|W}(x,y | w)$ es

la distribución condicionada conjunta. La información sobre la densidad condicional multivariante se puede obtener diferenciando la ecuación (4.1) como:

$$f_{XY|W}(x, y | w) = f_{X|W}(x | w) \cdot f_{Y|W}(y | w) \cdot c(u, v | w), \quad (4.2)$$

donde $c(u, v | w) = \partial^2 C(u, v | w) / \partial u \partial v$ es la densidad condicionada de la cópula. Por consiguiente, la densidad condicional conjunta de las variables X y Y está representado por el producto de la densidad condicionada de la cópula y las dos densidades marginales condicionadas.

La modelización de la estructura de dependencia con cópulas en lugar de una función de densidad multivariante ofrece varias ventajas. En primer lugar, las cópulas permiten modelar por separado la dinámica del tipo de cambio del dólar y de los precios de los alimentos y por otro lado la estructura de dependencia, ofreciendo así una mayor flexibilidad en la modelización de las distribuciones marginales que la que tendríamos utilizando modelos paramétricos para la densidad multivariante. En segundo lugar, las cópulas son especialmente útiles cuando la distribución conjunta de las variables de interés es no elíptica. En esos casos, la medida de la dependencia tradicional -el coeficiente de correlación lineal- es insuficiente para describir la estructura de dependencia (los inconvenientes de la utilización de la correlación lineal para analizar la dependencia se discuten en [Embrechts et al. 2003b](#)). En tercer lugar, algunas medidas de concordancia ([Nelsen, 2006](#)) entre las variables aleatorias, como la rho de Spearman o la tau de Kendall, son propiedades de la cópula. Finalmente, la cópula proporciona información sobre la dependencia promedio y de la dependencia cuando ocurren movimientos extremos en los precios de mercado, denominada dependencia de cola. La dependencia de cola mide la probabilidad de que dos variables toman valores conjuntamente en las colas superior o inferior de la distribución bivalente. Por lo tanto, la dependencia de la cola mide la propensión que tienen dos variables aleatorias para subir o bajar conjuntamente. La dependencia de la cola superior (derecho) e inferior (a la izquierda) se puede expresar en términos de la cópula entre X y Y como:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \Pr[X \geq F_X^{-1}(u) | Y \geq F_Y^{-1}(u)] = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}, \quad (4.3)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \Pr[X \leq F_X^{-1}(u) | Y \leq F_Y^{-1}(u)] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}, \quad (4.4)$$

donde F_x^{-1} y F_Y^{-1} son las funciones cuantiles marginales y donde $\lambda_U, \lambda_L \in [0,1]$. Dos variables aleatorias exhiben la dependencia de cola inferior (superior) si $\lambda_L > 0$ ($\lambda_U > 0$), lo que indica una probabilidad distinta de cero de observar un valor extremadamente pequeño (grande) para una serie junto con un valor extremadamente pequeño (grande) para la otra serie.

Con la finalidad de capturar diferentes formas de dependencia entre el dólar y el precio de los alimentos, se han considerado varias especificaciones para la función cópula: la cópula Gaussiana bivalente, con dependencia de cola cero; la cópula t de Student que captura la dependencia simétrica en la cola de la distribución y anida la de cópula Gaussiana como caso particular; la cópula Clayton, que permite una dependencia de cola inferior y la independencia en la cola superior; la cópula Gumbel, que permite la independencia en la cola inferior y la dependencia en la cola superior; la cópula de Clayton-Gumbel, que permite la dependencia asimétrica en la cola de la distribución y; por último, hemos considerado las cópulas Gaussiana y t-Student con parámetros cambiantes en el tiempo para permitir que la dependencia cambie a lo largo del tiempo. La Tabla 4.1 resume la forma funcional, los parámetros de dependencia y los coeficientes de cola superior e inferior para todas estas cópulas.

Para tener en cuenta las principales características del tipo de cambio del dólar y de los precios de los alimentos, tales como colas gruesas y el efecto de apalancamiento, para los modelos marginales se consideró el modelo ARMA(p,q)-TGARCH introducido por [Zakoian \(1994\)](#) y [Glosten et al. \(1993\)](#). De este modo, los modelos marginales para las rentabilidades del dólar o de los alimentos, r_t , se pueden especificar como:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j r_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}, \quad (4.5)$$

donde p y q son enteros no negativos y donde ϕ y θ son los parámetros AR y MA, respectivamente. El proceso de ruido blanco ε_t se supone que sigue una distribución t-Student con ν grados de libertad:

$$\sqrt{\frac{\nu}{\sigma_t^2(\nu-2)}} \varepsilon_t \sim \text{i.i.d. } t_\nu, \quad (4.6)$$

σ_t^2 es la varianza condicional de ε_t , que evoluciona de acuerdo a:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^r \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^m \gamma_j \varepsilon_{t-j} I_{t-j}, \quad (4.7)$$

Tabla 4.1: Especificaciones de funciones cópula.

Copula	Distribución	Parámetros	λ_L	λ_U
Gaussian	$C_N(u, v; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$\rho \in (-1, 1)$	0	0
Student-t	$C_{ST}(u, v; \rho, \nu) = T_{\nu, \rho}(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v))$	$\rho \in (-1, 1)$	$2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho})$	
Clayton	$C_{CL}(u, v; \alpha) = \max\left\{\left(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1\right)^{-1/\alpha}, 0\right\}$	$\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$	$2^{-1/\alpha}$	0
Gumbel	$C_G(u, v; \delta) = \exp\left(-\left((-\log u)^\delta + (-\log v)^\delta\right)^{1/\delta}\right)$	$\delta \in [1, \infty)$	0	$2 - 2^{1/\delta}$
Clayton-Gumbel	$C_{CG}(u, v; \delta, \eta) = \left\{\left[\left(u^{-\delta} - 1\right)^\eta + \left(v^{-\delta} - 1\right)^\eta\right]^{1/\eta} + 1\right\}^{-1/\delta}$	$\delta > 0, \eta \geq 1$	$2^{-1/\delta\eta}$	$2 - 2^{1/\eta}$
TVP Gaussian	$C_N(u, v; \rho_t) = \Phi_{\rho_t}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$\rho_t \in (-1, 1)$	0	0
TVP Student-t	$C_{ST}(u, v; \rho, \nu) = T_{\nu, \rho_t}(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v))$	$\rho_t \in (-1, 1)$	$2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho_t}/\sqrt{1+\rho_t})$	

Notas. $\Phi^{-1}(u)$ y $\Phi^{-1}(v)$ son funciones cuantiles normales estándar, Φ_ρ es la función de distribución acumulativa bivalente normal estándar con la correlación ρ , $t_\nu^{-1}(u)$ y $t_\nu^{-1}(v)$ son las funciones cuantiles univariantes de la distribución t-Student siendo ν el parámetro de grados de libertad, $T_{\nu, \rho}$ es la función de distribución acumulada bivariada t-Student siendo ν el parámetro de grados de libertad y ρ el coeficiente de correlación, TVP indica parámetro variable en el tiempo, y, ρ_t al igual que en Patton (2006) está dado por $\rho_t = \Lambda(\psi_0 + \psi_1 \rho_{t-1} + \psi_2 \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \Phi^{-1}(u_{t-j}) \cdot \Phi^{-1}(v_{t-j}))$ donde $\Lambda(x) = (1 - e^{-x})(1 + e^{-x})^{-1}$ es la transformación logística modificada para mantener el valor de ρ_t en $(-1, 1)$.

donde ω es una constante; el componente de heterocedasticidad autorregresiva condicional generalizada (GARCH) está dado por σ_{t-j}^2 ; el componente de heterocedasticidad autorregresivo condicional (ARCH) está dado por las noticias sobre la volatilidad de los períodos anteriores, ε_{t-j} ; $I_{t-j} = 1$ si $\varepsilon_{t-j} < 0$, en caso

contrario 0; y γ capta el efecto apalancamiento. Para $\gamma > 0$, la varianza condicional futura se incrementará proporcionalmente más después de un shock negativo que en el caso de un shock positivo de la misma magnitud. El número de retardos p , q , r y m para cada serie fue seleccionado utilizando el criterio de información de Akaike (AIC).

Los parámetros de las distribuciones marginales y de la función cópula se estiman por máxima verosimilitud (ML) utilizando un procedimiento de dos pasos llamado inferencia para las marginales (Joe y Xu, 1996). Este procedimiento consiste en descomponer la función de verosimilitud como la suma de la función de verosimilitud de las marginales más la verosimilitud de la función cópula (véase la ecuación 4.2). En consecuencia, en primer lugar se estiman los parámetros de las distribuciones marginales por separado utilizando ML y luego se estiman los parámetros de la cópula resolviendo el problema:

$$\psi = \arg \max_{\psi} \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_t, \hat{v}_t; \psi), \quad (4.8)$$

donde ψ son los parámetros de cópula, $\hat{u}_t = F_X(x_t; \hat{\alpha}_x)$ y $\hat{v}_t = F_Y(y_t; \hat{\alpha}_y)$ son consideradas observaciones de la cópula. Bajo condiciones de regularidad estándar, esta estimación de dos pasos es consistente y las estimaciones de los parámetros son asintóticamente eficientes y normales (véase Joe, 1997). Los diferentes modelos cópula se evaluaron utilizando el AIC ajustado por la existencia de sesgos derivados del tamaño de la muestra, siguiendo Breymann et al. (2003), Rodríguez (2007) y Reboredo (2011, 2012a).

4.3 Datos

Se estudió la estructura de dependencia entre los principales precios de los alimentos básicos -el maíz, la soja, el trigo y el arroz- y el dólar utilizando datos semanales desde el 9 enero de 1998 al 12 octubre de 2012 (el período de la muestra inicial y el número de semanas consideradas se determinó por la disponibilidad de datos de precios de alimentos). Los precios de los alimentos, expresados en dólares por tonelada, se obtuvieron de la Base de datos de precios de productos básicos de la Organización Internacional Alimentación y la Agricultura. Se analizaron los precios de los cereales porque los granos compiten con la demanda derivada para el maíz con la finalidad de producir etanol y con

la demanda derivada para la soja con la finalidad de producir biodiesel (sobre todo cuando los precios del petróleo son altos). Por otro lado, el trigo es un alimento clave que compite con el maíz y la soja para la rotación de cultivos y cuya producción es intensiva en energía. Finalmente, el arroz, además de ser un elemento básico fundamental en algunos países pobres, está sujeto a una serie de distorsiones comerciales que incluyen entre otras el acaparamiento especulativo (ver [Heady, 2011](#); [Timmer, 2010](#)). Para el tipo de cambio dólar, hemos considerado el índice de cambio ponderado que elabora el Banco de la Reserva Federal de Saint Louis, donde un aumento del índice refleja una depreciación del dólar. Los datos fueron descargados de la página web del Banco de la Reserva Federal de Saint Louis (<http://www.frbstlouis.com>). La rentabilidad de precios de alimentos y tasa de cambio se calcularon utilizando el sistema de capitalización continua, $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$, donde P_t and P_{t-1} son los precios en la semana t y en la semana anterior.

La Figura 4.1 muestra la dinámica temporal de los precios de los alimentos y el dólar durante todo el período muestral. Tendencias coherentes se pueden observar, a pesar de que la intensidad y la duración de los movimientos hacia arriba o hacia abajo, en general, difieren. Podemos observar algunos subperiodos en los que los precios de los alimentos aumentaron, principalmente antes de 2008, cuando el dólar se depreció frente a las principales monedas. Con la intensificación de la crisis financiera mundial después de 2008, los precios de los alimentos cayeron y el dólar se apreció. En años recientes, sin embargo, los precios de los alimentos y el dólar han seguido tendencias similares, y no hay concomitancia clara entre los picos de precios de alimentos en 2011 y el valor del dólar.

La estadística descriptiva y las propiedades estocásticas de los datos de rendimientos para los alimentos y del dólar se muestran en la Tabla 4.2. Los rendimientos medios fueron cercanos a cero para todas las series de rentabilidades y, dado que las rentabilidades fueron reducidas en relación con sus desviaciones estándar, no existe una tendencia significativa en los datos. La diferencia entre los valores máximos y mínimos muestra que los precios de los alimentos fueron más volátiles que el dólar. Las rentabilidades del dólar mostraron valores negativos para la asimetría, aunque esta característica no fue compartida por las rentabilidades de los alimentos.

Todas las rentabilidades muestran exceso de curtosis, con valores que oscilaron entre 4,1 y 6,6, lo que confirma la presencia de colas gruesas en las distribuciones marginales y observaciones extremas relativamente frecuentes. El test de Jarque-Bera rechazó de forma contundente la normalidad de la distribución incondicional para todas las series. Además, los valores del estadístico Ljung-Box hasta el orden 20 sugieren la ausencia de correlación para todas las series, con la excepción de la serie de rentabilidades para el arroz. Asimismo, el test del multiplicador de Lagrange para efectos ARCH (ARCH-LM) indica la presencia de efectos ARCH en todas las series de rendimientos. El coeficiente de correlación lineal que se muestra en la Tabla 4.3 indica que los alimentos y la depreciación de dólar están correlados, si bien el coeficiente de correlación toma valores bajos a excepción del arroz donde toma valores cercanos a cero. Para la muestra estudiada, no fue posible identificar cualquier punto de cambio estructural en la dependencia lineal cuando se aplicó el estadístico-F para la hipótesis nula de no cambio en la relación de dependencia lineal, como el desarrollado por [Andrews \(1993\)](#), [Andrews y Ploberger \(1994\)](#) y [Hansen \(1997\)](#).

Figura 4.1: Movimientos de precios de los alimentos y USD entre el 9 de enero 1998 y el 12 de octubre de 2012.

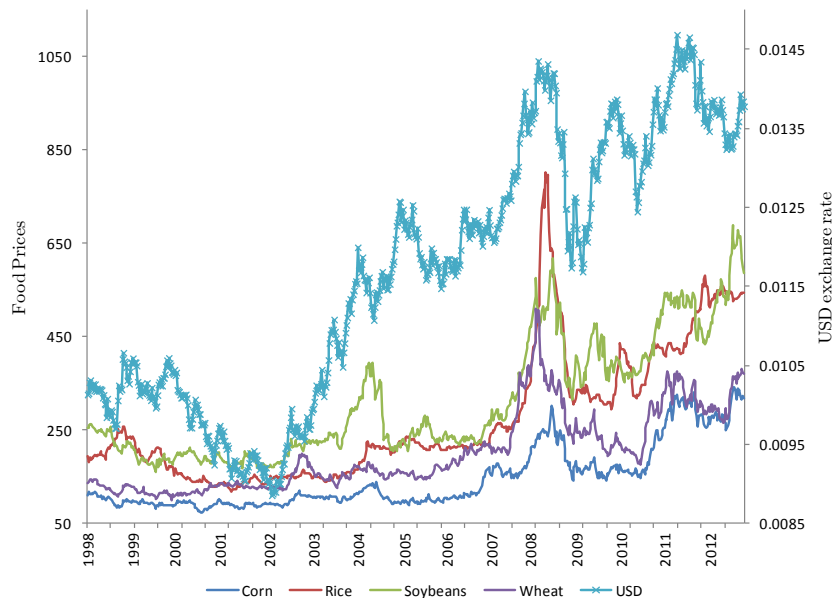


Tabla 4.2: Estadística descriptiva.

	Maíz	Soja	Trigo	Arroz	Dólar
Mean	0,002	0,001	0,001	0,001	0,000
Std. Dev.	0,039	0,038	0,038	0,027	0,011
Max	0,189	0,128	0,145	0,148	0,039
Min	-0,138	-0,232	-0,153	-0,111	-0,043
Skewness	0,025	-0,631	0,016	0,206	-0,181
Kurtosis	4,498	6,692	4,162	6,582	4,247
Jarque-Bera	65,07	440,79	39,11	376,43	48,81
$Q(20)$	19,89	29,38	14,32	146,18*	27,36
ARCH-LM	4,64*	2,60*	3,30*	11,70*	2,82*

Notas. Los datos son semanales para el período 9 de enero de 1998 hasta 12 de octubre de 2012. Jarque-Bera es el estadístico χ^2 para la prueba de normalidad. $Q(k)$ es la estadístico de Ljung-Box para correlación serial en los rendimientos calculados con k retardos. ARCH-LM es el test-LM de Engel's para heterocedasticidad, calculado con 20 retardos. Un asterisco (*) indica el rechazo de la hipótesis nula al nivel del 5%.

Tabla 4.3: Matriz de correlación de Pearson.

	Maíz	Soja	Trigo	Arroz	Dólar
Maíz	1				
Soja	0,338	1			
Trigo	0,487	0,223	1		
Arroz	0,043	0,030	0,034	1	
Dólar	0,160	0,282	0,164	0,055	1

Antes de proporcionar estimaciones de cópulas paramétricas, se reporta en primer lugar información sobre la estructura de dependencia entre los precios de los alimentos y el dólar americano. Para ello, se obtuvo información sobre la cópula empírica para cada serie de retornos mediante la obtención de los deciles, de modo que las observaciones se distribuyeron uniformemente en 10 cajas de tal manera que la caja 1 incluye las observaciones con los valores más bajos y la caja 10 incluye las observaciones con los valores más altos. A continuación, para

cada momento del tiempo t y para cada par de series dólar-alimentos, hemos asignado a cada observación a su caja específica, para $i, j = 1, 2, \dots, 10$ y $t = 1, 2, \dots, T$. Así, tenemos una matriz 10×10 , donde las filas incluyen las cajas de una serie en orden ascendente de arriba abajo y las columnas incluyen las ubicaciones de las cajas para la otra serie en orden ascendente de izquierda a derecha. Contamos el número de observaciones que compartían cada celda (i, j) , por lo que si las dos series están perfecta y positivamente (negativamente) correlacionados tendríamos que la mayoría de las observaciones se encuentran en la diagonal que une la esquina superior izquierda con la esquina inferior derecha (la esquina inferior izquierda con la esquina superior derecha), y si fueran independientes tendríamos que los números en cada caja son aproximadamente iguales. Por otra parte, cuando tenemos dependencia de cola inferior entre las dos series tendríamos más observaciones en la celda $(1,1)$, mientras que si hay dependencia de cola superior esperaríamos más observaciones en la celda $(10,10)$.

La Tabla 4.4 muestra los resultados de la cópula empírica para los diferentes pares dólar-alimentos. La evidencia de dependencia positiva (excepto para el arroz) está indicada por el hecho de que el número de observaciones a lo largo de la diagonal superior-izquierda/inferior-derecha es mayor que el número de observaciones en las otras celdas, por lo que el valor del dólar y los precios de los alimentos se mueven en direcciones opuestas. Al comparar los 10th percentiles inferiores y superiores, el hecho de que no haya diferencias significativas entre las frecuencias extremas conjuntas y frecuencias medias es una primera evidencia de la independencia potencial de cola. En general, los resultados de la Tabla 4.4 son plenamente consistente con la dependencia positiva débil (excepto para la soja) mostrada por el coeficiente de correlación incondicional en la Tabla 4.3.

4.4 Resultados empíricos

4.4.1 Resultados de modelos marginales

Se estimó el modelo de distribución marginal dado por las ecuaciones. (4.5)-(4.7) para la serie de rentabilidades del dólar y de los alimentos considerando diferentes combinaciones para los valores de los parámetros p, q, r y m desde cero hasta dos. La Tabla 4.5 muestra los resultados. El modelo más adecuado de

Tabla 4.4: Cópula empírica para el dólar y los alimentos.

Dólar-Maíz	14	11	7	3	6	6	3	9	3	8
	10	4	6	9	6	6	10	5	7	6
	10	5	6	8	6	8	10	5	7	5
	3	7	9	7	5	5	10	7	10	6
	5	6	10	9	9	13	5	6	4	3
	5	5	10	6	7	5	8	6	8	10
	9	8	7	10	6	9	8	4	5	3
	7	8	4	6	1	6	8	11	9	10
	3	6	4	6	7	11	5	6	11	10
	4	9	7	5	10	8	2	11	5	9
Dólar-Soja	17	12	5	5	6	6	3	1	10	5
	7	11	12	7	7	7	9	3	5	1
	9	8	12	9	7	2	3	13	3	4
	3	8	8	10	8	5	5	7	8	7
	8	7	7	7	8	10	8	6	5	4
	3	4	3	12	12	6	8	4	9	9
	8	5	9	4	11	8	6	8	5	5
	5	5	6	5	3	10	8	10	11	7
	2	7	3	9	3	10	8	11	6	10
	8	2	5	1	5	6	11	7	7	18
Dólar-Trigo	13	9	7	10	4	4	5	5	7	6
	8	9	8	4	4	11	7	7	6	5
	5	7	5	11	4	10	13	7	4	4
	9	6	6	5	5	13	4	5	7	9
	7	7	9	9	3	11	10	3	7	4
	7	7	4	7	1	12	5	6	11	10
	8	8	7	6	6	10	5	12	4	3
	4	5	11	5	4	13	3	10	6	9
	6	5	7	7	4	5	8	10	9	8
	3	6	5	6	7	9	9	5	8	12

Tabla 4.4 (continuación)

Dólar-Arroz	11	7	5	8	0	12	4	6	6	11
	8	9	2	7	0	14	10	8	7	4
	3	12	14	7	0	12	4	6	7	5
	7	6	8	7	0	14	6	6	7	8
	4	7	6	3	0	19	9	5	8	9
	7	7	11	6	0	15	6	8	5	5
	9	7	9	6	0	15	3	7	9	4
	8	5	5	3	0	18	8	7	5	11
	6	5	6	3	0	18	11	9	7	4
	6	4	5	3	0	19	8	8	8	9

Nota. Cada serie tiene 695 observaciones. Las rentabilidades del dólar se clasifican a lo largo del eje horizontal y en orden ascendente, de arriba abajo. Las rentabilidades de los alimentos se clasifican a lo largo del eje vertical y en orden ascendente de izquierda a derecha. Cada celda muestra el número de observaciones que pertenece a los respectivos cuantiles de las series de rentabilidades del dólar y de los alimentos.

de acuerdo a los valores de AIC fue la especificación de un ARMA(0,0)-TGARCH (1,1), excepto para el arroz donde los desfases -1 y -4 se incluyeron en la especificación de la media. La volatilidad fue en general bastante persistente en todas las series y el efecto apalancamiento fue significativo sólo para el trigo y el arroz, y no para el dólar, lo que es consistente con anteriores resultados empíricos para alimentos y tipos de cambio (véase Reborado, 2012a, 2012b). Las últimas filas de la Tabla 4.5 muestran también que ni la autocorrelación ni los efectos ARCH permanecieron en los residuos.

Se evaluó la bondad del ajuste de los modelos marginales contrastado si las transformaciones de probabilidad para $\hat{u}_t = F_X(x_t; \hat{\alpha}_x)$ y $\hat{v}_t = F_Y(y_t; \hat{\alpha}_y)$ fueron i.i.d uniforme (0,1). Esta proposición fue contrastada en dos pasos (véase Diebold et al., 1998).

En primer lugar, se evaluó la hipótesis i.i.d. mediante el análisis de la correlación serial de $(\hat{u}_t - \bar{u})^k$ y $(\hat{v}_t - \bar{v})^k$ para $h=20$ retardos para ambas variables para $k=1,2,3,4$. A continuación, para contrastar la hipótesis nula de independencia serial, se utilizó el estadístico LM que se define como $(T-h)R^2$, en donde R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión. Este estadístico se distribuye como una $\chi^2(h)$ bajo la hipótesis nula. Según los resultados de esta

prueba, recogidos en la Tabla 4.6, la hipótesis i.i.d. no puede ser rechazada al nivel de significación del 5%.

Tabla 4.5: Estimación de la distribución marginal para alimentos y el dólar.

	Maíz	Soja	Trigo	Arroz	Dólar
Media					
ϕ_0	0,002 (1,17)	0,002 (1,66)	0,001 (0,72)	0,001 (1,59)	0,001 (1,45)
ϕ_1				0,1468 (4,45)*	
Varianza					
ω	0,000 (2,16)*	0,000 (2,37)*	0,000 (2,34)*	0,000 (0,81)	0,000 (1,68)
α_1	0,122 (3,05)*	0,130 (3,09)*	0,198 (3,24)*	0,191 (2,56)*	0,053 (2,39)*
β_1	0,819 (15,21)*	0,795 (13,27)*	0,812 (16,68)*	0,912 (42,33)*	0,892 (18,92)*
γ			-0,129 (-2,10)*	-0,149 (-2,11)*	
Tail	8,754 (2,84)*	5,889 (5,02)*	9,887 (2,39)*	2,924 (6,10)*	12,608 (2,33)*
Log-Likelihood	1306,5	1345,3	1339,6	1657,1	2191,5
$Q(20)$	15,70 [0,735]	22,14 [0,333]	12,74 [0,888]	24,13 [0,237]	23,04 [0,287]
ARCH(20)	1,11 [0,33]	0,45 [0,98]	0,52 [0,96]	1,30 [0,16]	0,60 [0,91]

Nota. Este cuadro presenta las estimaciones de ML y el estadístico z (entre paréntesis) para los parámetros del modelo de distribución marginal definidos en las ecuaciones. (4.5)-(4.7). Los valores p, q, r y m se seleccionaron mediante el criterio AIC para diferentes combinaciones de valores que van desde 0 a 2. Para la serie de arroz, también se consideró un retardo de -4. $Q(20)$ es el estadístico de Ljung-Box para correlación serial en los residuos del modelo calculados con 20 retardos. ARCH es el test LM de Engel's para el efecto ARCH en los residuos hasta el orden 20. Los p valores (entre corchetes) por debajo de 0,05 indican un rechazo de la hipótesis nula. Un asterisco (*) indica significatividad para un nivel de confianza del 5%.

En segundo lugar, hemos probado la hipótesis nula de que \hat{u}_t y \hat{v}_t fueron uniformes $(0,1)$ mediante las pruebas de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises y de Anderson-Darling, donde se compara la distribución empírica y la función de distribución teórica especificada. Las últimas filas de la Tabla 4.6 reportan los p valores para todas estas pruebas. En todos los casos la hipótesis nula de la correcta especificación de la función de distribución al nivel de significación del 5% no puede ser rechazada. Por lo tanto, podemos concluir que nuestros modelos de distribución marginales no están mal especificados y, como resultado, el modelo cópula captura correctamente los comovimientos entre los precios de los alimentos y el dólar estadounidense.

Tabla 4.6: Pruebas de bondad de ajuste para las distribuciones marginales.

	Maíz	Soja	Trigo	Arroz	Dólar
Primer momento	0,746	0,505	0,683	0,526	0,108
Segundo momento	0,509	0,860	0,219	0,416	0,412
Tercer momento	0,924	0,440	0,922	0,196	0,468
Cuarto momento	0,330	0,935	0,631	0,429	0,712
K-S test	0,495	0,734	0,128	0,083	0,451
C-vM test	0,700	0,824	0,586	0,093	0,480
A-D test	0,822	0,762	0,675	0,064	0,512

Notas. Esta tabla recoge los p valores del estadístico LM para la hipótesis nula de no correlación serial de los cuatro primeros momentos de las variables u_t y v_t obtenidas de los modelos marginales que se presentan en la Tabla 5. Las variables $(\hat{u}_t - \bar{u})^k$ y $(\hat{v}_t - \bar{v})^k$ son explicadas por 20 retardos para ambas variables considerando $k = 1, 2, 3, 4$. El estadístico LM se distribuye como $\chi^2(20)$ bajo la hipótesis nula. Los valores de p inferiores a 0,05 indican rechazo de la hipótesis nula de que el modelo está correctamente especificado. KS, C-VM y AD denotan la prueba de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises y Anderson-Darling para la adecuación del modelo de distribución (se reportan los p valores de estos estadísticos).

4.4.2 Estimación de la función cópula para la dependencia

Primeramente se presenta una estimación no paramétrica de la densidad de la cópula (Deheuvels, 1978). Esta estimación en los puntos $\left(\frac{i}{T}, \frac{j}{T}\right)$ viene dada por:

$$\hat{C}\left(\frac{i}{T}, \frac{j}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T 1_{\left\{u_k \leq u_{(i)}, v_k \leq v_{(j)}\right\}}, \quad (4.9)$$

donde $u_{(1)} \leq u_{(2)} \leq \dots \leq u_{(T)}$ y $v_{(1)} \leq v_{(2)} \leq \dots \leq v_{(T)}$ son los estadísticos de orden de las muestras univariantes y donde 1 es la función indicador habitual. La Figura 4.2 muestra la estimación de la densidad bivariada no paramétrica para los alimentos y el USD. La evidencia gráfica indica que: (1) existe dependencia positiva y débil entre los alimentos y el dólar, con la excepción del arroz donde hay independencia, (2) existe una clara evidencia de independencia de cola superior e inferior indicando que los mercados de alimentos y de cambio se mueven de forma independiente cuando ocurren eventos extremos en el mercado, excepto para la soja que muestra evidencia de dependencia de cola superior, y (3) evidencia de una baja probabilidad de movimientos extremos de signo contrario en el mercado: los movimientos extremos hacia arriba (hacia abajo) en los precios de los alimentos no ocurren simultáneamente con movimientos extremos hacia abajo (hacia arriba) en el tipo de cambio del dólar. Esta evidencia gráfica es consistente con los resultados de cópula empíricos mostrados en la Tabla 4.4.

La Tabla 4.7 presenta los resultados para las funciones cópula paramétricas que se describen en la Tabla 4.1. La evidencia de cópulas elípticas indicó que, en general, los parámetros de dependencia en las cópulas Gausiana y la t de Student (el coeficiente de correlación) fueron positivos, significativos y consistentemente cercanos al valor del coeficiente de correlación lineal de los datos. La dependencia varía según los tipos de alimentos: para el arroz fue cercana a cero e insignificante, mientras que para la soja alcanzó 0,29. Los grados de libertad para la cópula t de Student no fueron muy bajos (de 7 a 11), indicando la existencia de dependencia de cola para todos los tipos de alimentos, con la excepción del trigo dado que la cópula t de Student convergió a la cópula normal. Teniendo en cuenta la dependencia de cola asimétrica, las estimaciones de los parámetros para las cópulas Clayton y Gumbel fueron significativas (a excepción de la cópula Clayton para el arroz), reflejando así la dependencia positiva entre los alimentos y el USD. Sin embargo, la dependencia de cola fue bastante cercana a cero tanto para las cópulas Clayton como Gumbel, a pesar de que la soja muestra una clara evidencia de la dependencia de cola, principalmente en la cola superior.

Del mismo modo, los parámetros estimados para la cópula Clayton-Gumbel, (δ y η), que admiten diferentes valores de dependencia para la cola

superior e inferior, fueron significativos en la mayoría de los casos, indicando la independencia de cola para todos los precios de los alimentos, con la excepción de la soja, para la cual se encuentra dependencia de cola asimétrica. Por último, los resultados de la dependencia variable en el tiempo para la cópula normal y t de Student también indican dependencia positiva, ya que el coeficiente de correlación tomó valores positivos en todo el periodo muestral. Comparando las diferentes estructuras cópula a través del criterio AIC ajustado el sesgo de muestra pequeña, las diferentes especificaciones cópula se consideraron apropiados para cada serie de precios de los alimentos: las mejores cópulas fueron la Clayton, Clayton-Gumbel, Gaussiana y t-Student para el maíz, la soja, el trigo y el arroz, respectivamente.

Figure 4.2: Estimación no paramétrica de la densidad.

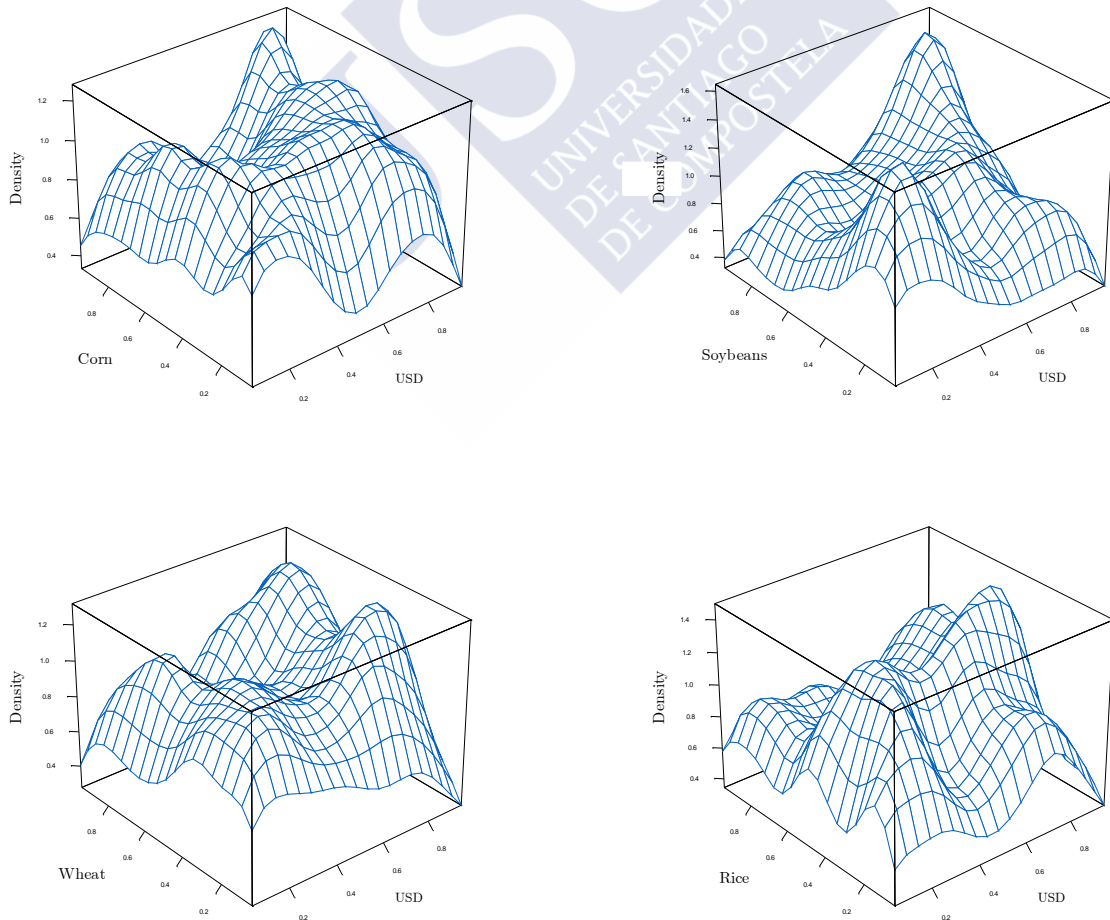


Tabla 4.7: Parámetros estimados para los modelos cópula.

	Maíz-Dólar	Soja-Dólar	Trigo-Dólar	Arroz-Dólar
Gaussian				
ρ	0,111 (0,037)*	0,292 (0,034)*	0,147 (0,037)*	0,053 (0,042)
AIC	-6,661	-56,047	-13,115	0,422
Student-t				
ρ	0,111 (0,038)*	0,282 (0,033)*	0,148 (0,001)*	0,053 (0,041)
ν	10,710 (4,741)*	7,044 (2,510)*	500,000 (1,887)*	11,292 (5,732)*
AIC	-10,706	-62,883	-11,082	-0,586
Clayton				
α	0,150 (0,047)*	0,314 (0,054)*	0,153 (0,047)*	0,053 (0,048)
AIC	-10,832	-43,725	-10,838	0,644
Gumbel				
δ	1,059 (0,026)*	1,227 (0,035)*	1,080 (0,028)*	1,037 (0,027)*
AIC	-3,996	-62,556	-9,594	-0,185
Clayton-Gumbel				
δ	0,135 (0,056)*	0,122 (0,060)*	0,104 (0,055)*	0,021 (0,056)
η	1,012 (0,026)*	1,165 (0,042)*	1,040 (0,029)*	1,029 (0,032)*
AIC	-9,038	-65,422	-11,606	1,687
TVP Gaussian copula				
Ψ_0	0,301 (0,166)	0,045 (0,064)	0,092 (0,154)	0,292 (0,168)
Ψ_2	0,068 (0,082)	0,065 (0,070)	0,072 (0,194)	0,001 (0,991)
Ψ_1	1,528 (0,610)*	1,679 (0,578)*	-0,034 (0,989)	0,001 (0,099)
AIC	-4,414	-53,601	-9,224	4,434
TVP Student-t copula				
Ψ_0	0,301 (0,166)	0,080 (0,114)	0,178 (0,338)	0,154 (0,164)
Ψ_2	0,095 (0,142)	0,032 (0,038)	0,055 (0,147)	0,112 (0,202)
Ψ_1	-1,229 (1,090)	1,703 (0,456)*	0,495 (2,755)	-1,249 (1,509)
AIC	-1,328	-58,891	11,940	7,434

Nota. La tabla presenta las estimaciones de los parámetros de cópula para varias especificaciones cópula (véase Tabla 1), errores estándar (entre paréntesis) y el AIC ajustados por sesgo de muestra pequeña para cada par de retornos de alimentos-dólar. En negrita se indica el valor de AIC mínimo, que indica el mejor ajuste cópula. Para cópulas TVP, q (ver nota en Tabla 4.1) fue elegido para valores entre 8 y 14 según el AIC. El número total de observaciones para cada par fue 695. Un asterisco (*) indica significación al nivel de confianza del 5%.

En conclusión: (1) no se encontró evidencia de dependencias variables en el tiempo entre los alimentos y el dólar; (2) la dependencia promedio fue diferente para los distintos tipos de alimentos, con valores cercanos a cero para el arroz y valores relativamente altos para la soja; (3) no se encontró evidencia de dependencia de cola, con una dependencia de cola inferior de acuerdo con la cópula Clayton para el maíz que fue cercano a cero, mientras que la cópula Gumbel-Clayton aportó pruebas para la dependencia de cola superior y dependencia de cola inferior cerca a cero para la soja. Esta evidencia de la independencia de la cola es consistente con la idea de que los mercados de alimentos y de tipos de cambio exhiben una dependencia positiva baja y no estuvieron totalmente integrados, por lo que los movimientos extremos de valor en un mercado no fueron transmitidos al otro mercado. Este resultado indica que las alzas de precios de alimentos, como los observados en las crisis de precios de los alimentos en 2008 y 2011 (Véase [Abbott et al., 2011](#)) no puede ser explicado por la depreciación del USD y deberíamos, más bien, mirar otros factores determinantes de la oferta y demanda de alimentos.

4.5 Discusión e implicaciones para el análisis del riesgo

El análisis empírico de comovimiento entre productos de alimentación y mercados de cambio tiene una serie de implicaciones que discutiremos a continuación. En primer lugar, el análisis indica que la dependencia de los movimientos del dólar americano no tienen plenamente en cuenta las fluctuaciones de precios de los alimentos, en particular, las depreciaciones extremas del dólar tienen un efecto neutro sobre los mercados de productos básicos agrícolas a excepción del mercado de soja. La evidencia sobre el nexo de soja-dólar en el extremo superior de la distribución conjunta se explica por el hecho de que es el principal cultivo utilizado en la producción de biodiesel como fuente de energía alternativa. Además, la depreciación del dólar está relacionada con el precio del petróleo, por lo que existe un nexo entre el tipo de cambio del dólar, el precio de la soja y el precio del petróleo (véase [Reboredo, 2012a, 2012b](#)).

Nuestra evidencia tiene implicaciones para los responsables políticos, que deben tener en cuenta el efecto asimétrico de los tipos de cambio del dólar en las políticas con la finalidad de estabilizar los precios de algunos alimentos, como el arroz y el trigo. En algunos países pobres o de ingresos medios, un proyecto de ley de aumento de las importaciones de alimentos podría resultar en un mayor

déficit en cuenta corriente, lo que, a su vez, afectaría negativamente a las variables macroeconómicas como el tipo de cambio, las reservas bancarias nacionales y del endeudamiento (Senauer, 2008). Como consecuencia de ello, a corto plazo, las políticas de subsidios de alimentos deben estar diseñadas para reducir los efectos negativos de los precios de los alimentos en los países pobres y deben aplicarse con independencia de los cambios bruscos en la tasa de cambio del dólar. Además, los gobiernos aplican diferentes políticas de precios, como el control de precios, regulaciones comerciales que influyen en el origen y destino de las exportaciones y las políticas de libre comercio para controlar la volatilidad de los precios agrícolas y evitar así los efectos de los grandes movimientos y los cambios en los tipos de cambio con el dólar. La evidencia empírica obtenida indica que tales políticas son innecesarias.

Desde la década del 2000, una inversión significativa en los alimentos ha llevado a una financialización de los mercados de alimentos básicos (véase Tang y Xiong, 2010b). Los productos alimenticios se han convertido de este modo en una clase de activos para los que el comovimiento de su precio con otras variables financieras es especialmente relevante para la diversificación y la protección de las inversiones contra riesgos a la baja. Por lo tanto, la evidencia obtenida de las funciones cópula con respecto a un fortalecimiento del dólar y el precio de los alimentos, como se ha expuesto, es de vital importancia para los inversores que buscan activos para cubrir y garantizar la protección de riesgo a la baja.

Para analizar la utilidad en la gestión de riesgos de fluctuaciones en los precios de los alimentos se han considerado diferentes tipos de carteras frente a una cartera de referencia, denominada cartera 1, formado por un solo tipo de alimento considerado como activo. Consideramos otra cartera, llamada cartera 2, obtenida reduciendo al mínimo el riesgo de una cartera de alimentos y el dólar americano sin reducir el rendimiento esperado y donde el peso óptimo del dólar en el momento t viene dado por (véase Kroner y Ng 1998):

$$\omega_t^{\text{USD}} = \frac{h_t^F - h_t^{F-\text{USD}}}{h_t^{\text{USD}} - 2h_t^{F-\text{USD}} + h_t^F}, \quad (4.10)$$

bajo la restricción de que, $\omega_t^{\text{USD}} = 1$ si $\omega_t^{\text{USD}} > 1$ y $\omega_t^{\text{USD}} = 0$ si $\omega_t^{\text{USD}} < 0$, y donde h_t^{USD} , h_t^F , y $h_t^{F-\text{USD}}$ son la volatilidad condicional del dólar, la volatilidad condicional de los alimentos y la covarianza condicional entre el alimento y el dólar en el

momento t , respectivamente. El peso otorgado a la alimentación en la cartera es, por construcción, igual a $(1 - \omega_t^{\text{USD}})$. Toda la información en la ecuación (4.10) puede obtenerse a partir del modelo ARMA-TGARCH y de la cópula que ofrece el mejor ajuste. También se consideró una cartera igualmente ponderada, denominada cartera 3, con buen rendimiento fuera de la muestra de acuerdo con DeMiguel et al. (2009). Por último, a partir de una estrategia de cobertura de riesgo que consiste en mantener una posición corta en una cantidad de futuros y una posición larga en el mercado spot (ver Hull, 2011), se consideró una cartera llamada cartera 4. Así, se considera una posición larga de un dólar en el mercado de los alimentos cubiertos por una posición corta de dólares en el mercado de cambio, dado por:

$$\beta_t = \frac{h_t^{\text{F-USD}}}{h_t^{\text{USD}}}, \quad (4.11)$$

La eficacia de la reducción del riesgo de las carteras se evaluó comparando el porcentaje de reducción de la varianza de una cartera frente a la cartera 1:

$$\text{RE}_{\text{variance}} = 1 - \frac{\text{Variance}_{\text{Portfolio } j}}{\text{Variance}_{\text{Portfolio } 1}}, \quad (4.12)$$

donde $j = 2, 3, 4$ y $\text{variance}_{\text{Portfolio } j}$ and $\text{variance}_{\text{Portfolio } 1}$ son las varianzas en los rendimientos de la cartera j y cartera 1, respectivamente. Un mayor valor del ratio de eficacia de reducción del riesgo significa una mayor reducción de la varianza. La Tabla 4.8 presenta los resultados de eficacia de reducción del riesgo para las carteras de 2, 3 y 4 para los diferentes tipos de alimentos. Los resultados indican una reducción de riesgo significativa para las carteras 2 y 3 y de menor cuantía para la cartera 4. Esta evidencia fue común a los diferentes tipos de alimentos, con resultados generalmente mejores para la cartera 2 que para las carteras 3 y 4. Estos resultados ponen de manifiesto la utilidad del dólar en la reducción de riesgo en una cartera de alimentos.

También se evaluó la utilidad del dólar en la protección contra el riesgo de bajadas extremas para los alimentos considerados como activo. A tal efecto, se estimó el valor en riesgo para todas las carteras. El valor en riesgo en el tiempo t para un activo o una cartera con una rentabilidad r_t se caracteriza por un nivel de confianza $(1-p)$ como:

Tabla 4.8: Efectividad reducción del Riesgo.

	Maíz	Soja	Trigo	Arroz
Cartera 2	0,919	0,910	0,908	0,846
Cartera 3	0,713	0,686	0,705	0,692
Cartera 4	0,012	0,078	0,019	0,028

Nota. Esta tabla muestra los resultados de eficacia en la reducción de riesgos para carteras de alimentos y dólar en comparación con una cartera compuesta únicamente de alimentos, calculado de acuerdo con la relación de efectividad-riesgo dada en la ecuación. (4.12). Los pesos de la cartera 2 están dados por la ecuación. (4.10), la cartera 3 tiene el mismo peso y pesos de la cartera 4 están dados por la ecuación. (4.11).

$$\Pr(r_t \leq \text{VaR}_t \mid \psi_{t-1}) = p, \quad (4.13)$$

donde ψ_{t-1} es la información disponible hasta el instante $t-1$. En otras palabras, el VaR es la pérdida máxima en valor de la cartera para un período de tiempo dado y un nivel de confianza dado, o, alternatively, la pérdida asociada con p^{th} percentil de la distribución de rendimientos durante un período determinado. Se puede calcular como:

$$\text{VaR}_t(p) = \mu_t - \Phi^{-1}(p)\sqrt{h_t}, \quad (4.14)$$

donde μ_t y $\sqrt{h_t}$ son la media y la desviación estándar condicional de los rendimientos de la cartera y donde $\Phi^{-1}(p)$ denota el cuantil $(1-p)$ de la distribución de la cartera.

Una medida del riesgo relacionado con el VaR es el tamaño esperado de la pérdida si el VaR es excedido (ES), es decir:

$$\text{ES} = E[r_t \mid r_t < \text{VaR}_t(p)], \quad (4.15)$$

Partiendo de una cartera compuesta por los alimentos y el USD, la rentabilidad logarítmica se calcula como:

$$r_t = \log\left(\omega_t^{\text{USD}} e^{r_t^{\text{USD}}} + (1 - \omega_t^{\text{USD}}) e^{r_t^{\text{F}}}\right), \quad (4.16)$$

donde r_t^{USD} , r_t^{F} y ω_t^{USD} son las rentabilidades continuas para el dólar, los alimentos y la proporción de renta invertida en dólares, respectivamente. Con la simulación de Monte Carlo, se obtuvo el VaR de la cartera y el ES de las funciones de distribución marginales y la información de la función cópula del siguiente modo: (1) se simularon dos innovaciones para cada tiempo t de las

mejores funciones cópula para cada tipo de alimento, (2) se transformaron estos valores simulados en los residuos tipificados invirtiendo la función de distribución acumulada marginal para cada par de alimentos-dólar, y (3) utilizando los residuos estandarizados simulados, hemos calculado las rentabilidades de alimentos y del dólar con los modelos marginales estimados y, para los pesos de cartera dados, calculamos los retornos de la cartera dados por la ecuación (4.16). Este proceso se ha repetido 2000 veces para $t = 1, \dots, T$ y el VaR se obtiene como el valor del p^{th} percentil en la distribución de los rendimientos de la cartera, mientras que el ES se calcula como el valor medio para las situaciones en que los retornos de la cartera exceden el VaR.

Se evaluaron las ganancias de riesgo a la baja de dos formas diferentes. En primer lugar, la precisión del VaR para cada cartera fue contrastado utilizando la prueba de razón verosimilitud condicional de la cobertura correcta, según el test propuesto por Christoffersen (1998), que tiene la independencia y la cobertura incondicional en cuenta (véase, por ejemplo, Jorion, 2007). A continuación, se examinó las reducciones de VaR y ES para las carteras 2, 3 y 4 en comparación con los valores que toman para la cartera 1 y luego se comparan las carteras 2, 3 y 4 con la cartera 1 considerando el siguiente VaR basado en la función de pérdida del inversor (véase Sarma et al., 2003; Reboredo, 2013):

$$l_t = E \left[r_t - \text{VaR}_t(p) \right]^2 1_{\{r_t - \text{VaR}_t(p)\}}, \quad (4.17)$$

donde 1 es la función indicadora habitual y donde el término cuadrático tiene en cuenta la magnitud de la pérdida, penalizando más las desviaciones grandes que las pequeñas. Dado el diferencial de pérdida, $z_t = l_t - l_t^l$, se contrasta la hipótesis nula de un diferencial nulo frente a la alternativa de un diferencial de pérdida mediana negativo. Para ello se emplea la prueba de los signos de un solo lado, definida como: $S = \left(\sum_{t=1}^T 1_{\{z_t \geq 0\}} - 0.5T \right) (0.25T)^{-0.5}$. Esta prueba se distribuye asintóticamente como una normal estándar y la hipótesis nula puede ser rechazada cuando $S < -1.645$.

La Tabla 4.9 presenta los resultados de la evaluación de riesgo para un nivel de confianza del 99%. La prueba de cobertura condicional indica que las carteras compuestas de alimentos y dólar se han comportado bien en términos del VaR ya que la hipótesis nula de cobertura condicional correcta no se rechaza

al nivel de significación del 5%. Los resultados condicionales de cobertura de la cartera 1 también fueron positivos, excepto para el arroz, que no tuvo una cobertura condicional correcta para un nivel de significación del 5%. Al investigar el efecto de la reducción del valor en riesgo derivado de la inclusión del dólar en una cartera de alimentos, se encontró evidencia de la reducción del valor en riesgo en todas las carteras, por lo que la pérdida máxima esperada en el valor de la cartera fue mayor en las carteras de los alimentos que en las carteras mixtas alimentos-dólar. El ES también se redujo para las carteras 2, 3 y 4. Por último, la evidencia proporcionada por la prueba de los signos de un solo lado indicó que las carteras de pesos óptimos e igualmente ponderados superaron la cartera 1 de alimentos. Estos resultados avalan la utilización del dólar en las carteras de inversión de alimentos con el objetivo de gestionar el riesgo de precios de alimentos.

4.6 Conclusiones

En este capítulo se examinó la estructura de dependencia entre el dólar y el precio de los alimentos, en particular el maíz, la soja, el trigo y el arroz, dado que el estudio de comovimientos de mercado entre el dólar y los mercados de alimentos tiene importantes implicaciones para países en desarrollo y desarrollados por igual. Esto se debe a que la volatilidad de precios de los alimentos y los desequilibrios internos en la balanza alimentaria se ven afectados por las fluctuaciones que experimenta el dólar. Los comovimientos entre el dólar y el precio de los alimentos son también de interés para los productores de alimentos y los inversores, ya que tiene profundas implicaciones para las estrategias de cobertura, de inversión y gestión de riesgos en los mercados de alimentos, que, al igual que otros mercados de materias primas, están siendo sometidos a un enorme grado de financialización.

Se ha contribuido a la literatura sobre la relación entre el dólar y el precio de los alimentos en dos formas. En primer lugar, esta es la primera vez que se utilizan funciones cópula para caracterizar la estructura de la dependencia, proporcionando información tanto sobre la dependencia media como de la dependencia de cola superior e inferior (movimientos conjuntos extremos). La dependencia de cola nos permitió evaluar si los mercados de alimentos y tipos de cambio son dependientes o independientes durante los períodos de fuertes auges y

caídas (como las crisis de 2008 y 2011). En segundo lugar, se ha investigado las implicaciones de la dependencia en media y de cola para la gestión de riesgos mediante la evaluación del riesgo de carteras compuestas por alimentos y dólares en comparación con el riesgo de la cartera configurada sólo por alimentos, utilizando para ello el VaR.

Tabla 4.9: Evaluación del riesgo a la baja para alimentos y dólar.

	Maíz	Soja	Trigo	Arroz
Cartera 1				
Cond, Cov,	0,460	0,232	0,241	0,018
ES	-0,015	-0,042	-0,011	-0,030
Cartera 2				
Cond, Cov,	0,704	0,878	0,704	0,712
VaR Reduc,	0,082	0,096	0,075	0,063
ES	-0,004	-0,004	-0,004	-0,006
Sign Test	-25,98	-25,90	-25,98	-25,98
Cartera 3				
Cond, Cov,	0,460	0,887	0,715	0,237
VaR Reduc,	0,054	0,067	0,048	0,051
ES	-0,008	-0,021	-0,005	-0,007
Sign Test	-26,28	-26,05	-26,13	-26,21
Cartera 4				
Cond, Cov,	0,451	0,704	0,704	0,920
VaR Reduc,	0,005	0,026	0,003	0,019
ES	-0,021	-0,040	-0,007	-0,008
Sign Test	-26,05	-25,98	-26,21	-25,83

Notas. Esta tabla muestra los resultados de ganancias en términos de riesgo para carteras de alimentos y dólar en comparación con una cartera compuesta sólo por alimentos (cartera 1). Los pesos de cartera 2 están dados por la ecuación. (4.10), la cartera 3 tiene el mismo peso y los pesos de la cartera de 4 están dados por la ecuación. (4.11). Cond. Cov. indica los p valores para la prueba de cobertura condicional. VaR Reduc. es la reducción de VaR de la cartera con respecto a la cartera 1 (valores positivos indican reducción VaR). ES la pérdida esperada condicionada a que sea mayor que el VaR. Sign test es la prueba de los signos de un solo lado de las diferencias en la función de pérdida para las carteras de 2, 3 y 4 en comparación con cartera 1.

La evidencia empírica obtenida, basada en datos semanales para el período comprendido entre enero de 1998 y octubre de 2012, corrobora la existencia de dependencia promedio baja y positiva e independencia de cola

entre el dólar y el maíz y el trigo, mientras que existe dependencia promedio e independencia de cola para el arroz. Esta evidencia indica que los picos de precios de estos productos no fueron causados por la extremada depreciación del dólar. Por el contrario, la evidencia de la dependencia media positiva y la dependencia de cola asimétrica que se encontró para la soja indica que la depreciación del dólar ha contribuido a los picos de precios observados en la soja. Los resultados de las políticas de gestión de riesgos proporcionan evidencia a favor de la utilidad del dólar en inversiones en alimentos dado que mejora la eficacia de cobertura y reduce el riesgo de la cartera mediante la reducción de VaR y logra un mejor desempeño en términos de la función de pérdida del inversor con respecto a una cartera compuesta solo de productos alimenticios.



Capítulo 5

Riesgo a la baja en el mercado de CO₂ de la UE y los mercados de combustibles fósiles

5.1 Introducción

En enero de 2005, la Unión Europea puso en funcionamiento el primer sistema internacional de negociación de derechos de emisión con la finalidad de reducir las emisiones de carbono de una forma coste-efectiva a través del mecanismo del mercado. El sistema de negociación de emisiones de la Unión Europea (ETS EU) establece límites para las emisiones de CO₂ para diferentes industrias pertenecientes a países de la UE de forma que los toques máximos de emisión sólo pueden ser superados con la condición de adquisición de derechos de emisión. Por lo tanto, los créditos de emisiones de gases de efecto invernadero se convirtieron en un recurso escaso y los derechos de emisión de la UE (EUA) se transformaron en un bien comercializable que se podría negociar en mercados organizados al contado y en mercados de futuros y opciones. De hecho, el mercado de derechos de emisión ha experimentado un rápido desarrollo con respecto a su tamaño, complejidad, liquidez y volumen negociado. Asimismo, la investigación acerca de la asignación de derechos y de los mecanismos de fijación de precios en el mercado europeo del carbono ha crecido de forma notable dado que es de interés para los responsables políticos, los inversores y gestores de riesgos que operan en este y otros mercados relacionados.

Los estudios empíricos sobre el ETS de la UE se centran en la dinámica de los precios del carbono, en particular, sobre la dinámica de los precios de los diferentes instrumentos que se utilizan (Benz y Trück, 2009; Chevallier, 2009; Conrad et al., 2012; Daskalakis et al., 2009; Paoletta y Taschini, 2008), la eficiencia de precios y transmisión de información entre mercados spot de la UE y los mercados de futuros (Benz y Hengelbrock, 2008; Chevallier, 2010a, 2010b; Milunovich y Joyeux, 2010; Rittler de 2012; Uhrig-Homburg y Wagner, 2009) y el impacto de la negociación de derechos de emisión en los mercados financieros (Daskalakis y Markellos, 2009; Oberndorfer de 2009; Veith et al, 2009). Otra rama de la investigación analiza los determinantes potenciales de los cambios de precios del carbono (Alberola et al., 2008; Bredin y Muckley, 2011; Christiansen et al., 2005; Convery y Redmond, 2007; Kanen, 2006; Mansanet-Bataller et al., 2007; Redmond y Convery, 2006), proporcionando evidencia de la relación entre los precios del carbono y las condiciones meteorológicas excepcionales, el crecimiento económico y los precios de la energía.

El desarrollo del mercado de carbono tiene efectos apreciables en los mercados de energía dado que el precio de las emisiones influye en los precios de la energía y en el desarrollo de las energías renovables. A este respecto, la evidencia empírica existente muestra que los precios del carbono están estrechamente relacionados con los precios de la energía, en particular con los mercados del petróleo (ver Kanen, 2006; Redmond y Convery, 2006; Chevallier, 2012; Reboredo, 2013), existiendo una evidencia clara de la interdependencia entre los mercados de emisión CO_2 y los mercados de combustibles fósiles (Chevallier, 2012). Por otra parte, tanto los derechos de emisión como los productos energéticos se negocian como cualquier otro activo financiero en mercados al contado y de futuros bien desarrollados, con lo que los mercados de derecho de emisión y combustibles fósiles también están relacionados desde el punto de vista financiero a través de los comovimientos de mercado. En este contexto, la medición del riesgo de mercado tiene un interés práctico para los inversores que operan en estos mercados. El objetivo principal del análisis que se realiza en este capítulo es evaluar la exposición al riesgo de los inversores que operan en el mercado de carbono y los mercados energéticos de combustibles fósiles.

El estudio empírico sobre la evaluación del riesgo se desarrolló desde el inicio de la segunda fase del ETS EU dado que esta fase se establece una relación más estable entre los precios de los derechos de emisión y sus principales determinantes (Bredin y Muckley, 2011) y la liquidez del mercado en mercados de futuros experimenta un aumento significativo (Benz y Hengelbrock, 2008; Bredin et al., 2009). El objetivo del análisis es extender la evidencia empírica existente en relación a la evaluación de riesgo en torno a dos ejes.

En primer lugar, se valora el riesgo utilizando el valor en riesgo (VaR) y la pérdida esperada por encima del VaR (ES) en los mercados de carbono, gas natural y petróleo utilizando modelos GARCH, la Teoría de los Valores Extremos (EVT) y las funciones cópula. En este sentido, el análisis desarrollado extiende el estudio del riesgo realizado por Feng et al. (2012) para el mercado de carbono y por Marimontou et al. (2009) para el mercado del petróleo teniendo en cuenta no sólo las características distintivas del riesgo en cada uno de estos mercados, sino también mediante la evaluación del riesgo de mercado de las carteras compuestas por derechos de emisión y los productos energéticos. Con esta finalidad, caracterizamos la interdependencia entre los mercados de carbono y los de combustibles fósiles a través de cópulas dado que ésta metodología proporciona información tanto de la dependencia promedio como de la dependencia de cola superior e inferior (movimientos conjuntos extremos), información que es crucial para la evaluación del riesgo de cartera. Asimismo, la utilización de funciones cópula proporciona información sobre cómo es la estructura de dependencia entre el mercado de carbono y los mercados de combustibles fósiles: ¿hay alguna dependencia para valores extremos?, ¿hay alguna respuesta asimétrica de los precios energéticos a los precios del carbono? y ¿la relación de dependencia ha cambiado en los últimos años? Esta información ayuda a mejorar la comprensión de la relación entre el carbono y los mercados de combustibles fósiles y a mejorar la evaluación del riesgo de las carteras compuestas de carbono y productos energéticos. Los resultados empíricos avalan la existencia de dependencia media positiva y de independencia extrema de mercado simétrica entre el mercado de derechos y el petróleo, y de independencia media y de cola entre el carbono y el gas natural, con la cópula Gaussiana como el mejor modelo de dependencia. Esta evidencia es consistente con la no existencia de efectos de contagio entre los mercados de derechos de

emisión y de combustibles fósiles. En segundo lugar, se estudian las consecuencias de las interdependencias entre el mercado de derechos de emisión y de combustibles fósiles para la gestión del riesgo de la cartera, proporcionando evidencia de la utilidad de los derechos de emisión en una cartera de petróleo o de gas natural para la diversificación y reducción del riesgo de cartera al evidenciarse una reducción significativa del VaR y del ES.

El resto del capítulo se organiza del siguiente modo: la sección 5.2 ofrece una breve sinopsis del ETS EU, la sección 5.3 describe brevemente la metodología para el estudio de riesgos y el análisis de la interdependencia de los mercados. En las secciones 5.4 y 5.5 se presentan los datos y se discuten los resultados obtenidos, respectivamente. Finalmente, la sección 5.6 recoge las conclusiones del capítulo.

5.2 El Sistema de Comercio de Emisiones de la Unión Europea

Como parte de su compromiso con el Protocolo de Kyoto, en enero de 2005 la Unión Europea inició un sistema de límites máximos y régimen de permisos de emisión de CO₂ de la UE que es el esquema de emisión comercial más grande del mundo y el primer mercado internacional de derechos de emisiones de CO₂. En la actualidad, están incluidos 29 estados (27 estados miembros de la UE más Noruega y Liechtenstein) y cubre más de 10.000 instalaciones industriales que realizan actividades que son intensivas en emisiones y son responsables de cerca de la mitad de las emisiones de CO₂ de Europa. En virtud de las directrices del ETS EU, un número limitado de derechos se asignan a los Estados participantes para cubrir un determinado volumen de emisiones durante una serie de años ("fase" o período de comercio). Los Estados miembros elaborarán planes nacionales de asignación (PNA) que determinan el número de derechos de emisión que cada instalación industrial recibe en un período de comercio.

Los grandes emisores de CO₂ deben de supervisar y reportar anualmente sus emisiones, y cada año deben devolver una cantidad de derechos de emisión equivalentes a las emisiones de CO₂ realizadas en ese año. Las empresas que mantienen sus emisiones por debajo del nivel de sus derechos pueden vender sus derechos de emisión sobrantes, mientras que aquellos que enfrentan dificultades para mantener sus emisiones de acuerdo con sus derechos de emisión deben tomar medidas para reducir sus propias emisiones (como invertir en tecnología

más eficiente o utilizando fuentes de energía menos contaminantes) o comprar los derechos que necesitan en el mercado. Para satisfacer los requisitos de cumplimiento las empresas también pueden utilizar otros instrumentos, llamados Reducciones Certificadas de Emisiones (RCE) obtenidas sobre la base de proyectos de reducción de emisiones y con un límite de utilización del 13,8% o Unidades de Reducción de Emisiones (URE) obtenidos mediante la reducción de emisiones bajo proyectos de Implementación Conjunta (AC). En la segunda fase, el incumplimiento de los compromisos con los resultados se penaliza con una multa de 100 euros/tonelada de CO₂ emitido en exceso. Los derechos de emisión se negocian en mercados organizados y over-the-counter. La negociación está regulada por cada Estado miembro y es supervisada por las autoridades nacionales. El mercado spot de EUA más líquido es el BlueNext en París, que representa alrededor del 70% de la facturación total diaria en mercados organizados. El mercado de futuros más líquido es el ICE en Londres, que atrae a alrededor del 90% del volumen de negocios diario de los futuros de EUA. El ETS EU no sólo garantiza que las emisiones totales se reducen, sino también que las reducciones de emisiones son hechas por las instalaciones con los costes de reducción más bajos.

La primera fase del ETS EU, que va desde 2005 a 2007, fue considerada una "fase de prueba". En 2006 se hizo evidente que la mayoría de las instalaciones se habían sobre-abastecido con créditos de carbono en la primera fase y, como resultado de ello, el precio de CO₂ se derrumbó. [Hintermann \(2010\)](#) y [Benz y Trück \(2009\)](#) examinaron el comportamiento de los precios al contado de la primera fase, mostrando que los cambios estructurales en energía afectaron al suministro de derechos de emisión. El segundo período, denominado Fase II, se extiende de 2008 a 2012. Coincide con el primer compromiso del protocolo de Kyoto para reducir las emisiones de gases de efecto invernadero en un 8% por debajo del nivel de 1990. Por último, el tercer período, llamado Fase III, se extenderá desde 2013 a 2020. [Zhang y Wei \(2010\)](#) ofrecen una visión global de la investigación actual sobre el ETS EU.

5.3 Metodología

Dado los precios de los EUA, el petróleo y el gas natural, las rentabilidades, r_t definen a partir de los precios utilizando capitalización

continúa como: $r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1})$, donde p denota el precio. Al considerar carteras de EUA-combustibles fósiles, compuestas por los EUA y el petróleo crudo o por los EUA y el gas, los rendimientos de la cartera expresados con capitalización continua están dados por:

$$r_t = \log(\omega_t^a e^{r_t^a} + (1 - \omega_t^a) e^{r_t^j}), \quad (5.1)$$

donde a denota los EUA y $j = O, NG$, O denota el crudo y NG el gas natural. ω_t^a es el peso de los EUA en esa cartera en el tiempo t . El riesgo a la baja del mercado de una inversión en los mercados de carbono o combustibles fósiles o en una cartera que combina los activos de ambos mercados se puede calcular mediante la estimación del VaR y el ES (véase [Jorion, 2007](#)).

El VaR se define como la pérdida máxima en valor de la cartera para un período de tiempo dado y un nivel de confianza determinado. Más formalmente, el VaR en el tiempo t , con un nivel de confianza $(1-p)$ se define como:

$$\Pr(r_t \leq \text{VaR}_t \mid \psi_{t-1}) = p, \quad (5.2)$$

donde ψ_{t-1} es la información hasta el instante $t-1$. Intuitivamente, la cifra del VaR indica la pérdida máxima que tendremos en un horizonte de tiempo dado con un $100(1-p)\%$; esta pérdida se asocia con el p^{th} cuantil de la distribución de rendimientos que se puede obtener por la función de distribución, F , como $F^{-1}(p)$. Por otra parte, el ES (o VaR condicional) es la pérdida esperada dado que la pérdida excede el VaR, esto es:

$$\text{ES} = E[r_t \mid r_t < \text{VaR}_t(p)] = \frac{\int_{-\infty}^{\text{VaR}_t(p)} r f(r) dr}{\int_{-\infty}^{\text{VaR}_t(p)} f(r) dr}. \quad (5.3)$$

Ambas medidas de riesgo a la baja requieren del conocimiento de la distribución de la rentabilidad de activos y la distribución de rentabilidad de la cartera. Para ello, adoptamos la metodología GARCH y la EVT para acercarse a la distribución de retorno individual y el enfoque cópula para caracterizar la distribución de la rentabilidad de la cartera. A continuación se describen brevemente estas metodologías.

5.3.1 GARCH

Para recoger los rasgos estilizados más importantes de las rentabilidades de los EUA, petróleo y gas, tales como colas gruesas, efectos de apalancamiento y heterocedasticidad condicional (véase, por ejemplo, [Benz y Trück, 2009](#); [Reboredo, 2013](#)), se utiliza un modelo autorregresivo de medias móviles con heterocedasticidad condicionada, ARMA(p,q)-t-EGARCH que se define como:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j r_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}, \quad (5.4)$$

donde p y q son enteros no negativos y donde ϕ y θ son los parámetros autorregresivos y de media móvil, respectivamente. ε_t es un término estocástico que tiene una distribución t de Student:

$$\sqrt{\frac{\nu}{h_t(\nu-2)}} \varepsilon_t \sim \text{iid } t_\nu, \quad (5.5)$$

donde ν denota los grados de libertad y h_t es la varianza condicional de ε_t que tiene una dinámica dada por:

$$\log(h_t) = \omega + \sum_{j=1}^r \beta_j \log(h_{t-j}) + \sum_{i=1}^m \alpha_j \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} \right| + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sqrt{h_{t-j}}}, \quad (5.6)$$

donde ω es una constante, h_{t-j} es la varianza del error para el período $t-1$ (el componente GARCH), ε_{t-i} es el error de predicción para el período $t-1$ (el componente ARCH) y donde λ capta los efectos de apalancamiento. Si $\lambda < 0$, entonces la varianza condicional futura se incrementará proporcionalmente más después de un shock negativo que en el caso de un shock positivo de la misma magnitud. El número de p , q , r y m en las ecuaciones (5.4) y (5.6) se seleccionó para cada serie de acuerdo con el criterio de información de Akaike (AIC).

Por lo tanto, en el tiempo t el VaR puede ser calculado como:

$$\text{VaR}_t(p) = \mu_t - t_\nu^{-1}(p) \sqrt{h_t}, \quad (5.7)$$

donde μ_t y $\sqrt{h_t}$ son la media condicional y desviación estándar de los rendimientos de los activos dada por las ecuaciones. (5.4)-(5.6) y donde $t_\nu^{-1}(p)$ denota el cuantil $(1-p)$ de la distribución t de Student con ν grados de libertad. Además, la ES en el tiempo t , se obtiene como:

$$ES_t = \mu_t + \sqrt{h_t} \left(\frac{g_v(t_v^{-1}(p))}{p} \right) \left(\frac{v + t_v^{-1}(p)^2}{v-1} \right), \quad (5.8)$$

donde g y t denotan la densidad t estandarizado y la distribución de la t , respectivamente.

5.3.2 Teoría de valores extremos

Los rendimientos en la cola de la distribución se pueden modelizar utilizando la EVT. A tal efecto, en la literatura se han propuesto dos enfoques para la caracterización de eventos extremos (véase, por ejemplo, [Tsay, 2010](#)): el modelo de Bloque Máximo (BMM) y el de Picos sobre el Umbral (POT). El análisis desarrollado se centra en el segundo enfoque, modelizando la distribución del exceso por encima de un umbral u . La función de distribución de exceso condicional para una variable x se define como:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad (5.9)$$

donde X es el residuo (estandarizado) de retorno del modelo dado por las ecuaciones (5.4)-(5.6). Para un valor suficientemente grande de u , la EVT sostiene que la distribución de la función del exceso se puede aproximar por la distribución generalizada de Pareto (GPD), dada por:

$$F_u(x) = G_{\xi, \beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x / \beta)^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x / \beta) & \text{if } \xi = 0 \end{cases}, \quad (5.10)$$

donde $x \in [0, \infty)$ para $\xi \geq 0$ y $x \in [0, -\beta / \xi]$ para $\xi < 0$. ξ y β son los parámetros de forma y escala de la distribución, respectivamente. El parámetro ξ reporta información sobre la tasa de desaparición de la cola de la distribución. Los parámetros de la distribución GPD pueden estimarse mediante la maximización de la función de probabilidad logarítmica, que para $\xi \neq 0$ y $\xi = 0$ está dado por:

$$\begin{aligned} L(\xi, \beta) &= -N_{(u)} \ln \beta - (1 + 1/\xi) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \xi x_i / \beta) \\ L(\beta) &= -N_{(u)} \ln \beta - \beta^{-1} \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}, \quad (5.11)$$

respectivamente. La función de distribución $F(x)$ para los excesos se puede escribir como:

$$F(x) = F_u(x)(1 - F(u)) + F(u) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\xi}{\beta} (x - u)^{-1/\xi}\right). \quad (5.12)$$

$F_u(x)$ es una distribución GPD y $F(u)$ está dada por $[n - N_u]/n$; n es el número total de observaciones; N_u es el número de observaciones por encima del umbral u ; ξ y β son los parámetros de la GPD.

La elección del umbral u es el tema importante: valores para u demasiado elevados generan pocas observaciones para excesos y, en consecuencia, los estimadores tienen una varianza alta. Por otra parte, valores para u demasiado pequeños ofrecen estimadores sesgados y la aproximación a una GPD no es exacta. Es posible seleccionar un umbral asintóticamente óptimo por medio de una cuantificación del sesgo frente a la varianza. Un enfoque, que es de uso inmediato en la práctica, se basa en la linealidad de la función exceso de media para la GPD. Siguiendo [Embrechts et al. \(1997\)](#), para un valor aleatorio X con una función de distribución GPD la función de exceso media es:

$$e(u) = E(X - u | X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \text{ for } \beta + u\xi > 0, \xi < 1, \quad (5.13)$$

lo que sugiere un enfoque gráfico para inferir el valor adecuado para u . Debido a la presencia habitual de múltiples opciones para el umbral, en la práctica se recomienda el estimador de Hill. Denotemos los estadísticos de orden de una muestra de retornos como $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(T)}$, para un entero positivo k el estimador de Hill se define como:

$$\hat{\xi}(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\ln r_{(T-j+1)} - \ln r_{(T-k)}). \quad (5.14)$$

Una manera de determinar el valor de k es representar el estimador de Hill frente a k con el propósito de identificar el valor de k para el que la estimación parece ser estable (véase [Tsay, 2010](#)). El estimador de Hill es asintóticamente una distribución normal con media cero y varianza dada por ξ^2/k .

Para una probabilidad dada $p > F(u)$ y umbral u , el VaR se puede obtener como:

$$\text{VaR}(p) = u + \frac{\beta}{\xi} \left[\frac{n}{N_u} (1 - p)^{-\xi} - 1 \right], \quad (5.15)$$

y el ES se obtiene sumando y restando el VaR de la expresión anterior como:

$$ES = \frac{VaR(p)}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}. \quad (5.16)$$

5.3.3 Cópulas

Al analizar la exposición al riesgo de una cartera, es necesario evaluar la dependencia entre los rendimientos de los activos incluidos en dicha cartera. Los pesos de la cartera y el riesgo de la misma están determinados por dicha dependencia. Concretamente, si consideramos una cartera que minimiza el riesgo para un determinado nivel de rentabilidad esperada, el peso óptimo de combustibles fósiles (petróleo o gas) viene dado por (Kroner y Ng, 1998):

$$\omega_t^E = \frac{h_t^{EUA} - h_t^{EUA-E}}{h_t^E - 2h_t^{EUA-E} + h_t^{EUA}}, \quad (5.17)$$

bajo la restricción de que $\omega_t^G = 1$ si $\omega_t^G > 1$ y $\omega_t^G = 0$ si $\omega_t^G < 0$ y donde h_t^{EUA} , h_t^E , y h_t^{EUA-E} son la volatilidad condicional de los EUA, la volatilidad condicional de combustibles fósiles (petróleo o gas) y la covarianza condicional entre los EUA y el combustible fósil en el tiempo t , respectivamente. Así, la cartera óptima en cada momento t es resultado del uso de la información relevante del modelo ARMA-t-EGARCH descrito anteriormente pero necesitamos además información adicional relacionada con la covarianza, es decir, información sobre la dependencia. Del mismo modo, si tenemos en cuenta una estrategia de cobertura de varianza consistente en mantener una posición corta en una cantidad de futuros y una posición larga en el mercado al contado (véase Hull, 2011), entonces una posición larga de un dólar en el mercado de los combustibles fósiles, puede estar cubierta por una posición corta en dólares en el mercado de los EUA, la cual está dada por:

$$\beta_t = \frac{h_t^{EUA-E}}{h_t^{EUA}}. \quad (5.18)$$

Al igual que en la ecuación (5.17), también es necesario conocer la dependencia entre los EUA y los mercados de combustibles fósiles.

Un modelo flexible de dependencia son las funciones cópula. Una cópula es una distribución de probabilidad multivariante que captura la dependencia entre dos variables aleatorias X e Y , con independencia de sus distribuciones marginales, $F_X(x)$ y $F_Y(y)$, respectivamente. De acuerdo con el teorema de Sklar (1959), existe una única cópula C tal que

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)), \quad (5.19)$$

dónde $F_{XY}(x, y)$ es la distribución conjunta de X e Y , y $u = F_X(x)$ y $v = F_Y(y)$ son los cuantiles de las distribuciones marginales univariantes. Por lo tanto, la cópula conecta las distribuciones marginales con una función de distribución multivariante que, a su vez, puede ser descompuesta en sus distribuciones marginales univariantes y una cópula que captura la estructura de dependencia entre las dos variables aleatorias. La cópula condicional se puede escribir como (Patton, 2006):

$$F_{XY|W}(x, y | w) = C(F_{X|W}(x | w), F_{Y|W}(y | w) | w), \quad (5.20)$$

donde W es la variable condicionada, $F_{X|W}(x | w)$ es la distribución condicional de $X | W = w$, $F_{Y|W}(y | w)$ es la distribución condicional de $Y | W = w$ y $F_{XY|W}(x, y | w)$ es la distribución conjunta condicional de $(X, Y) | W = w$.

La caracterización de la relación de dependencia con cópulas es especialmente útil en aquellas situaciones en las que la distribución conjunta de dos variables está lejos de una distribución elíptica dado que la medida de dependencia tradicional dada por el coeficiente de correlación lineal es insuficiente para describir la estructura de dependencia (véase Embrechts et al., 2003b). Además, algunas medidas de concordancia (Nelsen, 2006) entre las variables aleatorias, como la rho de Spearman y la tau de Kendall, son propiedades de la cópula. Por otro lado, la dependencia de la cola, que mide la probabilidad de que dos variables se encuentran conjuntamente en los extremos inferior o superior de su distribución bivalente, es una propiedad de la cópula. La dependencia de la cola superior (derecho) e inferior (a la izquierda) para dos variables aleatorias X e Y se puede expresar en términos de la cópula como:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \Pr[X \geq F_X^{-1}(u) | Y \geq F_Y^{-1}(u)] = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}, \quad (5.21)$$

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \Pr[X \leq F_X^{-1}(u) | Y \leq F_Y^{-1}(u)] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}, \quad (5.22)$$

donde F_X^{-1} y F_Y^{-1} son las funciones cuantiles marginales y dónde $\lambda_U, \lambda_L \in [0, 1]$. Dos variables aleatorias exhiben la dependencia de cola inferior (superior) si $\lambda_L > 0$ ($\lambda_U > 0$), lo que indica una probabilidad distinta de cero de observar un valor extremadamente pequeño (grande) de una serie conjuntamente con un valor extremadamente pequeño (grande) de la otra serie.

Se han utilizado varias especificaciones cópula para capturar patrones de dependencia diferentes: la cópula Gaussiana bivalente, que es la distribución más comúnmente empleada y tiene dependencia de cola nula; la cópula t de Student, que tiene la dependencia de la cola simétrica; la cópula Clayton, que permite la dependencia de cola inferior y la independencia de cola superior; la cópula Gumbel, que permite independencia de cola inferior y la dependencia superior de cola; la cópula BB7, que permite la dependencia de cola asimétrica y, por último, la cópula variable en el tiempo normal que capta los cambios temporales en la relación de dependencia.

Tabla 5.1: Especificaciones de funciones cópula.

Cópula	Distribución	Parámetros	λ_L	λ_U
Gaussian	$C_N(u, v; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$\rho \in (-1, 1)$	0	0
Student-t	$C_{ST}(u, v; \rho, \nu) = T_{\nu, \rho}(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v))$	$\rho \in (-1, 1)$	$2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho})$	
Clayton	$C_{CL}(u, v; \alpha) = \max\left\{\left(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1\right)^{-1/\alpha}, 0\right\}$	$\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$	$2^{-1/\alpha}$	0
Gumbel	$C_G(u, v; \delta) = \exp\left(-\left((-\log u)^\delta + (-\log v)^\delta\right)^{1/\delta}\right)$	$\delta \in [1, \infty)$	0	$2 - 2^{1/\delta}$
BB7	$C_{BB7}(u, v; \theta, \delta) = 1 - \left(1 - [h1 + h2 - 1]^{-1/\delta}\right)^{1/\theta}$ $h1 = \left(1 - (1 - u)^\theta\right)^{-\delta}, \quad h2 = \left(1 - (1 - v)^\theta\right)^{-\delta}$	$\delta > 0, \theta \geq 1$	$2^{-1/\delta}$	$2 - 2^{1/\theta}$
TVP Gaussian	$C_N(u, v; \rho) = \Phi_{\rho_t}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$\rho_t \in (-1, 1)$	0	0

Notas. $\Phi^{-1}(u)$ y $\Phi^{-1}(v)$ son funciones cuantiles normales estándar, Φ_ρ es la función de distribución acumulativa bivalente normal estándar con la correlación ρ , $t_\nu^{-1}(u)$ y $t_\nu^{-1}(v)$ son las funciones cuantiles univariantes de la distribución t-Student siendo ν el parámetro de grados de libertad, $T_{\nu, \rho}$ es la función de distribución acumulada bivariada t-Student siendo ν el parámetro de grados de libertad y ρ el coeficiente de correlación, TVP indica parámetro variable en el tiempo, y, ρ_t al igual que en Patton (2006) está dado por $\rho_t = \Lambda\left(\psi_0 + \psi_1 \rho_{t-1} + \psi_2 \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q \Phi^{-1}(u_{t-j}) \cdot \Phi^{-1}(v_{t-j})\right)$ donde $\Lambda(x) = (1 - e^{-x})(1 + e^{-x})^{-1}$ es la transformación logística modificada para mantener el valor de ρ_t en $(-1, 1)$.

En la Tabla 5.1 se proporciona la forma funcional, parámetros de dependencia y los coeficientes de cola inferior y superior para estas cópulas.

Los parámetros de la cópula se estiman por máxima verosimilitud (ML) utilizando un procedimiento en dos etapas denominado inferencia para las marginales (Joe y Xu, 1996). Dado que el logaritmo de la verosimilitud de las ecuaciones (5.19) y (5.20) puede ser descompuesto como la suma de la función de verosimilitud de las marginales más la función de verosimilitud de la cópula, en primer lugar estimamos los parámetros de las distribuciones marginales por ML utilizando el modelo ARMA-t-EGARCH y luego estimamos los parámetros de la cópula resolviendo el siguiente problema:

$$\theta = \arg \max_{\theta} \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_t, \hat{v}_t; \theta), \quad (5.23)$$

donde θ son los parámetros de cópula, $\hat{u}_t = F_X(x_t; \hat{\alpha}_x)$ y $\hat{v}_t = F_Y(y_t; \hat{\alpha}_y)$ son las muestras con las que estimamos la cópula. Bajo condiciones de regularidad estándar, esta estimación en dos etapas es consistente y las estimaciones de los parámetros son asintóticamente eficientes y normales (véase Joe, 1997).

La bondad de ajuste de los diferentes modelos cópula se evaluó utilizando dos criterios: (a) usando el AIC ajustado por el sesgo de muestra pequeña, como en Rodríguez (2007) y Reboledo (2012a) y la prueba propuesta por Genest et al. (2009) que se basa en la distancia entre la cópula empírica y estimada:

$$S_T = \int_0^1 C_T(u, v)^2 dC(u, v), \quad (5.24)$$

donde $C_T(u, v) = \sqrt{T}(\hat{C}(u, v) - C_\theta(u, v))$, $C_\theta(u, v)$ es la cópula paramétrica y $\hat{C}(u, v)$ es la cópula empírica. La cópula empírica en los puntos $(\frac{i}{T}, \frac{j}{T})$ viene dada por (Deheuvels, 1978):

$$\hat{C}\left(\frac{i}{T}, \frac{j}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T 1\left\{u_k \leq u_{(i)}, v_k \leq v_{(j)}\right\}, \quad (5.25)$$

donde $u_{(1)} \leq u_{(2)} \leq \dots \leq u_{(T)}$ y $v_{(1)} \leq v_{(2)} \leq \dots \leq v_{(T)}$ son los estadísticos de orden de las muestras univariantes y donde 1 es la función indicador habitual. Los valores grandes de S_T indican que la cópula estimada no está próxima a la cópula empírica.

5.4 Datos

El conjunto de datos utilizados está compuesto por el índice de precios diarios para los contratos de futuros sobre derechos de emisión, denominado ICE ECX EUA, de la European Climate Exchange para la Fase II del ETS EU durante el período del 2 de enero del 2008 al 31 de octubre del 2012. Para el mismo periodo, se tienen los datos de precios del crudo (Brent) y gas natural obtenidos de la Agencia de Información de Energía de EE.UU. (<http://www.eia.doe.gov>) expresados en euros. Se ha utilizado la información de precios spot de los combustibles fósiles ya que vamos a considerar el riesgo a la baja de una estrategia de minimización de varianza que consiste en mantener una posición corta en futuros en el mercado de los EUA y una posición larga en los mercados al contado del petróleo y gas natural.

La Figura 5.1 muestra que los tres mercados muestran tendencias coherentes de precios debido a que comparten cierta información común. La Figura 5.2 muestra la dinámica de precios (calculada utilizando capitalización continua) para los tres mercados, la cual presenta diferencias en la dinámica de precios con respecto al tamaño y el tiempo de las fluctuaciones.

Figure 5.1: Precios para los EUA, Brent y Gas Natural.

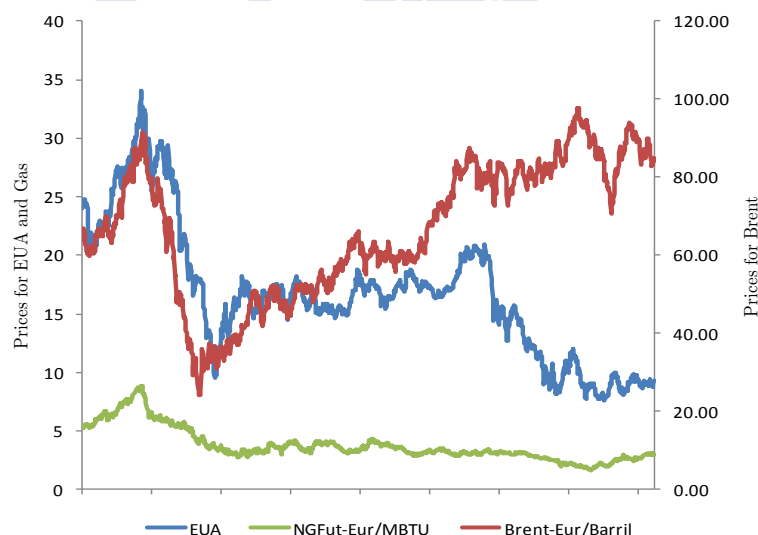
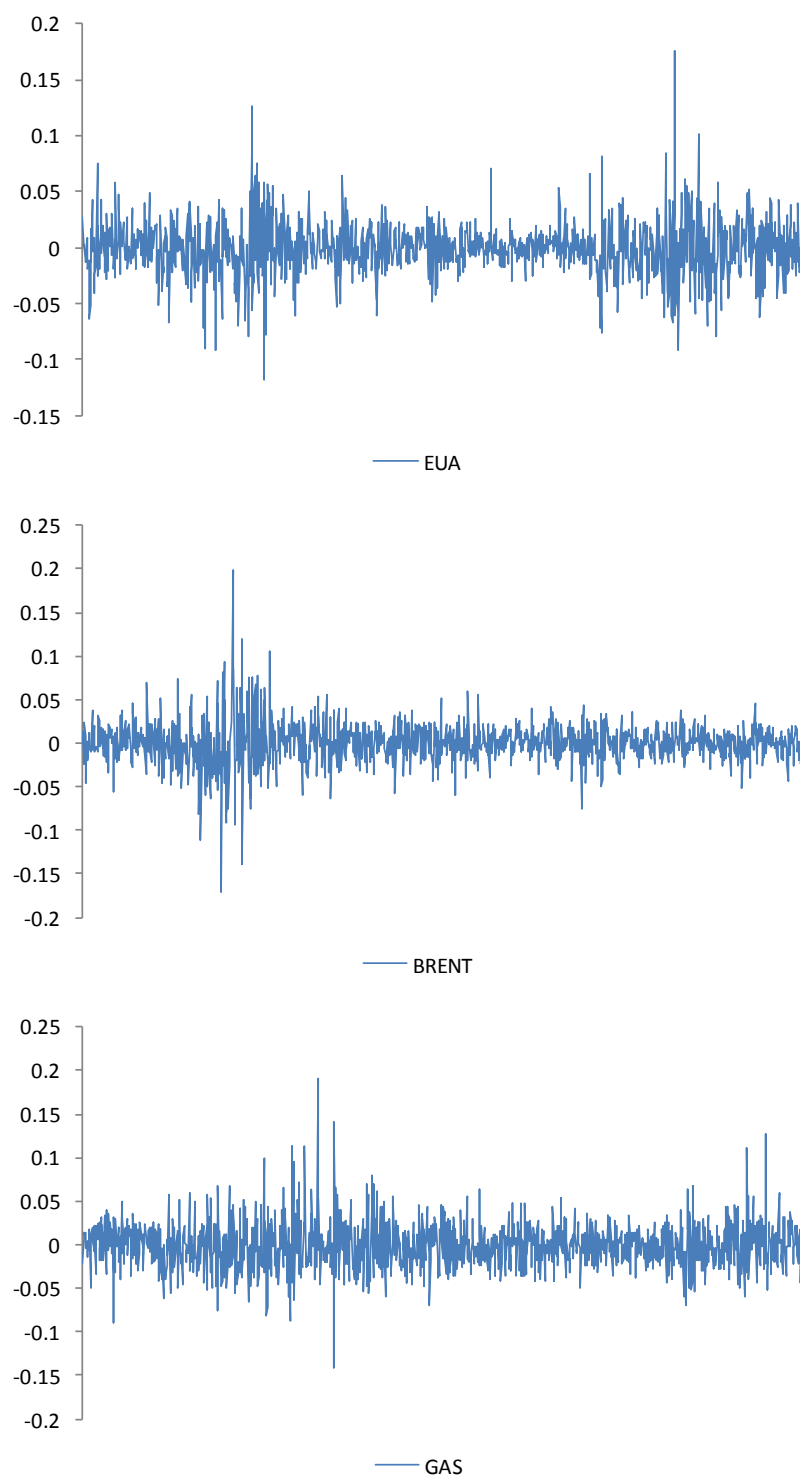


Figure 5.2: Rentabilidades para los EUA, Brent y Gas.



La Tabla 5.2 incluye información sobre los estadísticos descriptivos para las series de rentabilidades de los EUA, el petróleo y del gas natural. Los rendimientos medios fueron muy pequeños en relación a las desviaciones estándar y los valores positivos del estadístico de asimetría fueron más

pronunciados para el gas y los EUA, lo que sugieren una mayor probabilidad de grandes incrementos para dichos rendimientos en comparación con el Brent. Las tres series mostraron altos valores para el estadístico de curtosis y la prueba de Jarque-Bera rechazó la normalidad de la distribución incondicional para todas las series. Además, el estadístico Ljung-Box sugiere la presencia de correlación serial en la volatilidad de las series de rendimientos, de hecho, los efectos ARCH son significativos de acuerdo con el test LM. El contraste de estacionariedad utilizando los estadísticos convencionales de Dickey y Fuller (1979), Phillips y Perron (1988) y el test de Kwiatkowski et al. (1992) indican que las series son estacionarias. Por último, el coeficiente de correlación lineal indica que los rendimientos de EUA y Brent exhiben una dependencia positiva, mientras que los rendimientos EUA y NG exhibió una dependencia positiva pequeña.

Table 5.2: Estadística descriptiva.

	EUA	Brent	Gas
Media	-0,0007	0,0002	-0,0004
Desv. Std.	0,0244	0,0236	0,0272
Asimetría	0,2325	0,0852	0,5788
Curtosis	7,1602	12,1253	6,8053
Jarque-Bera	901,1*	4283,1*	813,4*
$Q(20)$	364,92*	664,53*	50,67*
ARCH-LM	8,19*	16,85*	1,88*
ADF	-31,70*	-36,62*	-40,19*
PP	-31,62*	-36,63*	-40,24*
KPSS	0,0566	0,1447	0,0822
Correlation	1		
Pearson	0,1497	1	
	0,0037	0,1755	1

Nota. Los datos son diarios para el período 2 de enero 2008 al 31 octubre de 2012. Jarque-Bera es el estadístico para la prueba de normalidad. $Q(k)$ es el estadístico de Ljung-Box para la correlación serial en los retornos al cuadrado calculados utilizando k retardos. ARCH-LM es la prueba LM de Engel's para heterocedasticidad, llevado a cabo con 20 retardos. ADF indica el test Dickey-Fuller, PP el test de Phillips y Perron (1988), KPSS es la prueba Kiwiatkowski et al. (1992). Un asterisco (*) indica el rechazo de la hipótesis nula al nivel del 5%.

5.5 Resultados empíricos

5.5.1 Resultados para modelos GARCH

Se ha estimado el modelo ARMA (p, q)-t-EGARCH (r, m) descrito por medio de las ecuaciones (5.4)-(5.6) para retornos de los EUA, petróleo y gas teniendo en cuenta diferentes combinaciones de los parámetros p, q, r y m para una combinación de valores que van desde cero a un retardo máximo de dos, seleccionando los retardos más apropiados de acuerdo con los valores del AIC. Los resultados se presentan en la Tabla 5.3. El mejor modelo fue un ARMA (1,0)-EGARCH (1,1) para los EUA y el gas, mientras que para el Brent el modelo más adecuado es un ARMA (0,0)-EGARCH (1,1). Para todas las series de rentabilidades, la volatilidad fue muy persistente y el efecto apalancamiento fue significativo solamente en los EUA y el petróleo, lo que implica que las noticias en los mercados de EUA y del petróleo tienen un impacto asimétrico en la volatilidad: las malas noticias o rendimientos negativos causan mayor volatilidad en los períodos subsiguientes que rentabilidades positivas o buenas noticias. Este efecto asimétrico no se ha encontrado en el mercado del gas. La evidencia que se obtuvo de la dinámica de los precios de EUA y combustibles fósiles es coherente con anteriores resultados empíricos (véase, por ejemplo, [Mohammadi y Su, 2010](#); [Pinho y Madaleno, 2011](#); [Reboredo, 2011, 2012b](#)). Finalmente, los valores estimados para los grados de libertad de la distribución t de Student avalan la no normalidad, evidencia que es consistente con los estadísticos descriptivos que se muestran en la Tabla 5.2. Las últimas filas de la Tabla 5.3 también muestran que ni los efectos de autocorrelación ni efectos ARCH se mantuvieron en los residuos.

También se ha analizado la bondad de ajuste de los modelos marginales. Con esta finalidad, se aplicó la propuesta formulada por [Diebold et al. \(1998\)](#): cuando las distribuciones marginales se han especificado correctamente, entonces los residuos estandarizados deben ser i.i.d. Uniformes (0,1), lo cual se contrasta en dos pasos.

En primer lugar se contrasta la hipótesis de i.i.d. mediante el análisis de la correlación serial de residuos obtenidos para cada serie, u_t , $(u_t - \bar{u})^k$ tomando h retardos y considerando valores para $k = 1, 2, 3, 4$. El estadístico de LM, se define como $(T-h)R^2$, en donde R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión

que se distribuye como $\chi^2(h)$ bajo la hipótesis nula de independencia de la serie. Los resultados de esta prueba, se presentan en la Tabla 5.4, indicó que la hipótesis i.i.d. no puede ser rechazada al nivel del 5%.

Table 5.3: Distribuciones marginales de los EUA, Brent y Gas.

	EUA	Brent	Gas
Media			
ϕ_0	-0,0006 (-1,32)	0,0006 (1,41)	-0,0008 (-1,27)
ϕ_1	0,0784 (2,82)*		-0,0988 (-3,39)*
Varianza			
ω	-0,3247 (-4,71)*	-0,1386 (-3,50)*	-0,2628 (-3,06)*
α_1	0,1917 (5,58)*	0,0996 (3,87)*	0,1121 (3,86)*
β_1	0,9765 (130,94)*	0,9921 (264,01)*	0,9759 (94,32)*
λ	-0,0821 (-4,32)*	-0,0468 (-3,06)*	-0,0290 (-1,60)
Tail	6,4591 (5,95)*	7,3937 (5,04)*	9,4395 (6,06)*
Log-Likelihood	3013,03	3103,93	2778,89
$Q(20)$	23,07 [0,285]	14,14 [0,823]	24,361 [0,227]
ARCH(10)	0,51 [0,961]	0,77 [0,752]	0,53 [0,954]

Nota. Esta tabla presenta las estimaciones de ML y estadístico z (entre paréntesis) para los parámetros de los modelos de distribución marginales definidos en las ecuaciones. (5,4) -(5,6). Los retardos p, q, r y m se seleccionaron mediante AIC para diferentes combinaciones de valores que van de 0 a 2. $Q(20)$ es el estadístico de Ljung-Box para correlación serial en los residuos del modelo calculados con 20 retardos. ARCH (20) es la prueba LM de Engel's para el efecto ARCH en los residuos hasta el orden 10. Valores de P (entre paréntesis cuadrados) por debajo de 0,05 indican un rechazo de la hipótesis nula. Un asterisco (*) indica significación al nivel de 5%.

En segundo lugar, hemos contrastado la hipótesis nula de que los residuos estandarizados son uniformes (0,1) para los tres modelos mediante la comparación de la distribución empírica y la función de distribución teórica

utilizando los tests de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises y de Anderson-Darling. La parte inferior de la Tabla 5.4 muestra los p valores para estas pruebas: al nivel de significación del 5% la hipótesis nula de especificación correcta de la función de distribución no puede ser rechazada para cualquiera de los modelos GARCH. Por lo tanto, las pruebas de bondad de ajuste indican que los modelos GARCH no estaban mal especificados.

Table 5.4: Bondad de ajuste para los modelos marginales.

	EUA	Brent	Gas
Primer momento	0,8334	0,8505	0,3798
Segundo momento	0,2887	0,8528	0,3570
Tercer momento	0,3893	0,4567	0,3221
Cuarto momento	0,1342	0,8214	0,4874
K-S test	0,7851	0,9717	0,5942
C-vM test	0,8362	0,9624	0,6184
A-D test	0,8131	0,8732	0,5691

Nota. Esta tabla muestra los p valores para el estadístico LM para la hipótesis nula de no correlación serial de los cuatro primeros momentos de los residuos estandarizados de los modelos marginales ARMA-t-EGARCH que se presentan en la Tabla 5.4. Valores de p inferiores a 0,05 indican el rechazo de la hipótesis nula que el modelo está correctamente especificado. También se muestran los valores de p para las pruebas de Kolmogorov-Smirnov (KS), Cramer-von Mises (C-VM) y Anderson-Darling (DC) para la adecuación del modelo de distribución.

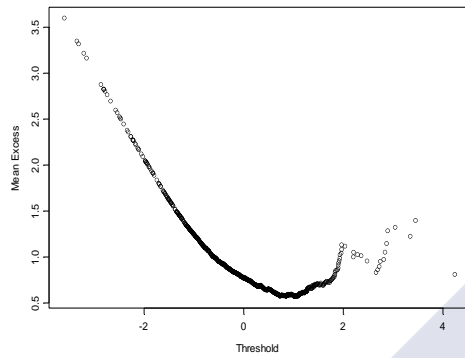
5.5.2 Resultados de la EVT

A partir de los residuos estandarizados del modelo ARMA-t-EGARCH estimado anteriormente, se obtuvieron los excesos medios utilizando el modelo POT para las series de rentabilidades de los EUA, Brent y gas. Después, se estimaron los parámetros ξ y β de la GPD. Elegimos el umbral u utilizando la forma lineal (con pendiente positiva) del gráfico que establece una relación lineal entre el parámetro estimado y el exceso (ver figuras 5.3a, 5.4a y 5.5a). La elección del umbral u determina el número de observaciones y la información a considerar: aumentando el número de observaciones para la serie de máximos (un umbral más bajo) y algunas observaciones del centro de la distribución son consideradas en la estimación siendo así el índice de la cola más preciso pero

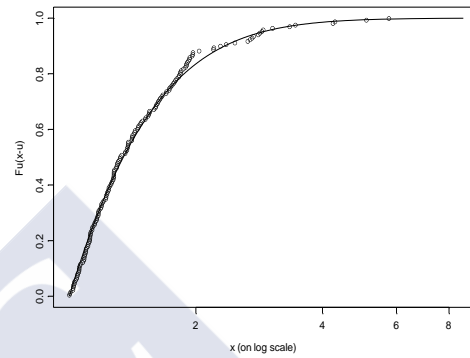
sesgado. Por el contrario, la elección de un umbral u elevado reduce el sesgo pero hace que el estimador sea más volátil. Las figuras 5.3-5.5 muestran los resultados de nuestras estimaciones para las tres series de retornos.

Figure 5.3: Resultados del modelo POT para los EUA.

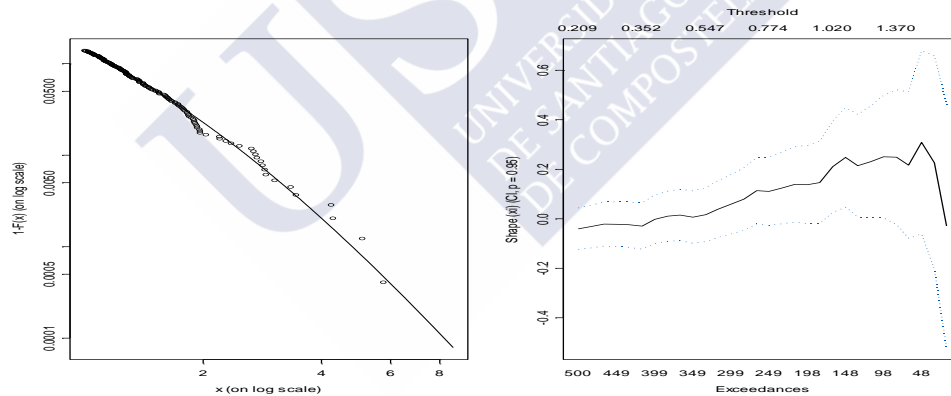
A. Función de exceso de media



B. Excesos de distribución



C. Ajuste de la GPD y parámetro ζ según u



D. QQ plot para los EUA

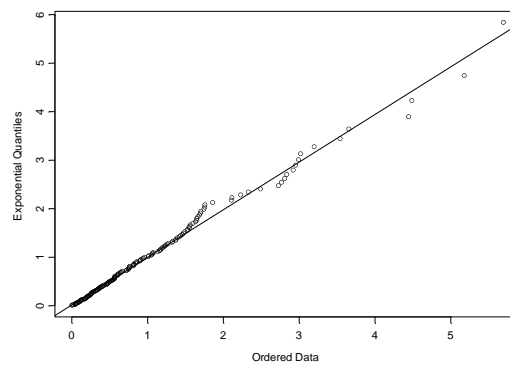
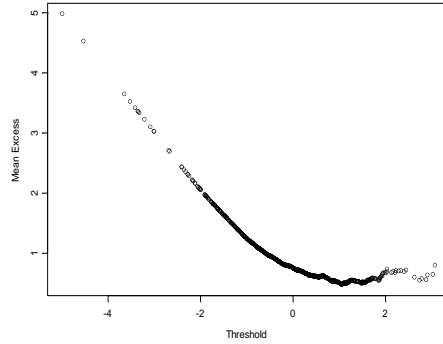
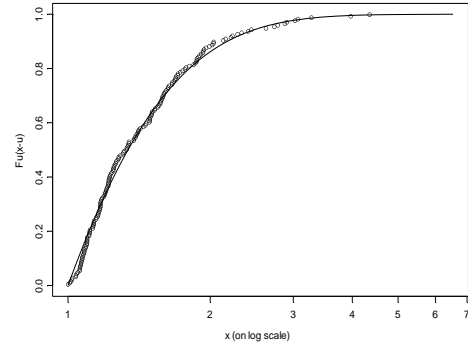


Figure 5.4: Resultados de modelo POT para Brent.

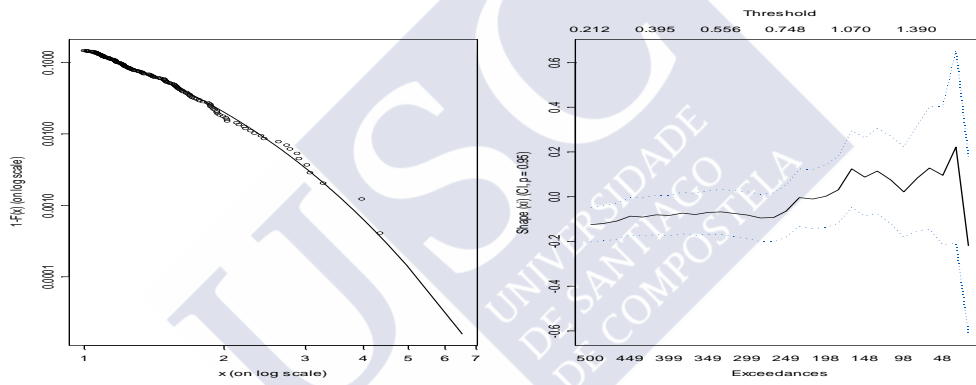
A. Función de exceso de media



B. Excesos de distribución



C. Ajuste de la GPD y parámetro ξ según u



D. QQ plot para Brent

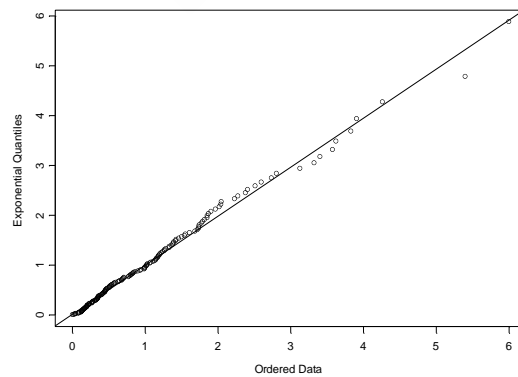
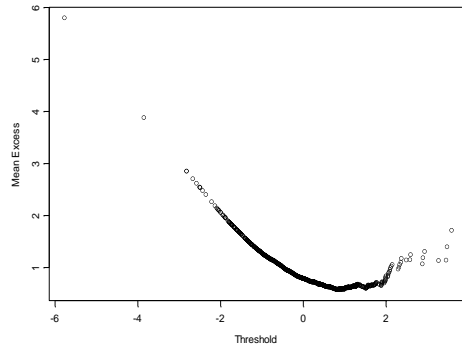
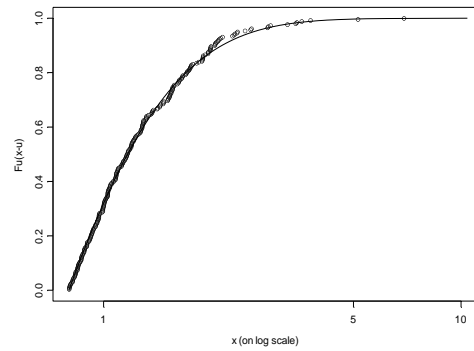


Figure 5.5: Resultados de modelo POT para Gas.

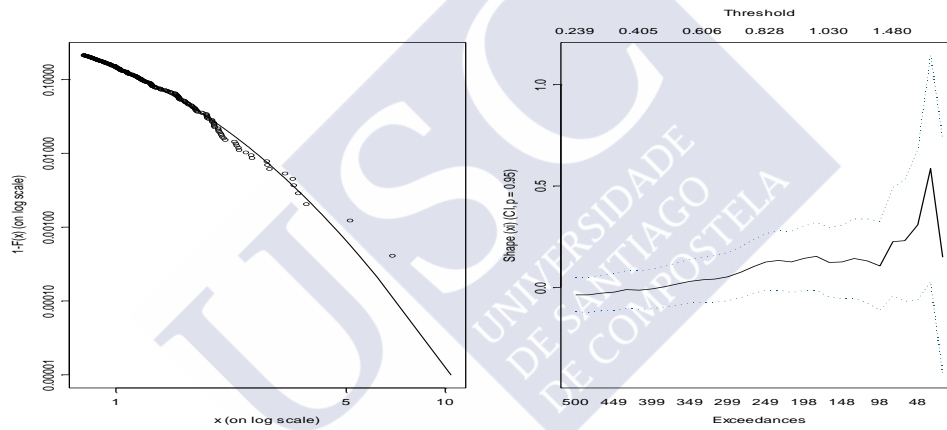
A. Función de exceso de media



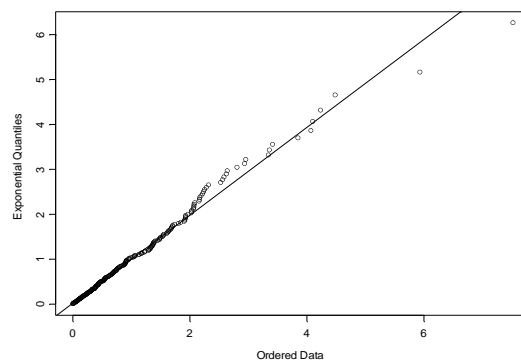
B. Excesos de distribución



C. Ajuste de la GPD y parámetro ξ según u



D. QQ plot para Gas



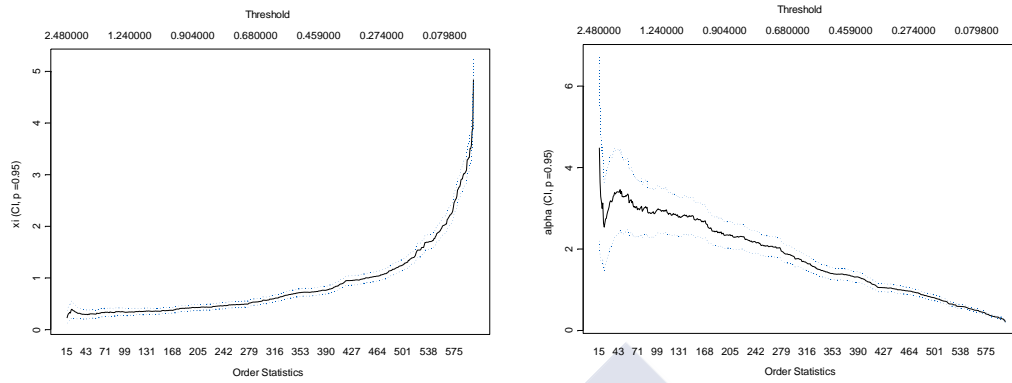
Como se observa en la Figura 5.3, los EUA se ajustan a una distribución generalizada de Pareto por lo que existe evidencia de cola pesada. Según el valor

del umbral, el valor del parámetro estimado, $\xi < 0,5$, indicando que la GPD se ajusta apropiadamente a los excesos sobre el umbral. La curva tiende a una línea asintótica que se ajuste a la distribución GPD. La Figura 5.3c proporciona información gráfica en la estimación de máxima verosimilitud del parámetro con un intervalo de confianza al 95%. Cuando el número de puntos extremos está entre 160 y 240, el estimador de forma ξ es asintóticamente estable. Las estimaciones de ξ son bastante estables y cercanas a cero para valores de umbral u menores de 0,77 y muestra un ligero incremento para valores de u entre 0,77 y 1,2.

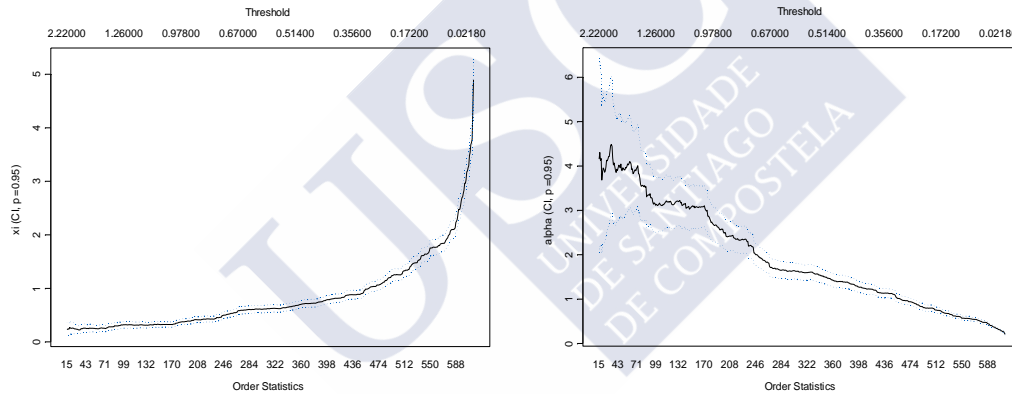
Teniendo en cuenta el gráfico de Hill y la función de exceso de media, el umbral $u=1$ es la elección más razonable para los EUA (el número de observación que exceden el umbral u es igual $N(u)=171$ correspondientes a 13,86% de los datos). En cuanto al ajuste de la GPD para los residuos estandarizados de Brent y gas, la cola superior fue estimada para un valor del umbral u de 1 y 0.8, siendo equivalentes al 14,51% y el 21,15% de las observaciones, respectivamente. El número de observaciones superiores al umbral es igual a $N(u)=179$ y $N(u)=261$, respectivamente. El valor estimado de ξ para los tres modelos indican que la GPD se ajusta bien a los excesos sobre el umbral, lo que indica una distribución de cola pesada. La Figura 5.6 proporciona el gráfico de Hill para los parámetros ξ y α (en comparación con los estadísticos de orden superior n y el umbral u , respectivamente). Se ha elegido el área donde el número de puntos extremos se encuentra entre 140 y 200 donde el estimador de Hill es asintóticamente más estable.

Figure 5.6: Estimador de Hill frente a los estadísticos de orden superior n (nivel de probabilidad $p=0,99$).

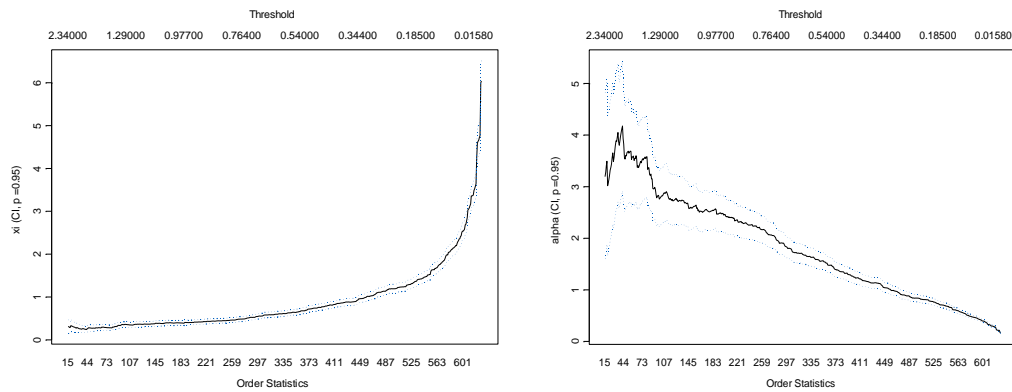
Panel A: Estimador de Hill para los EUA



Panel B: Estimador de Hill para Brent



Panel C: Estimador de Hill para Gas



Después de estimar los parámetros relevantes de la GPD, los resultados necesitan ser contrastados. Los parámetros del ajuste de cola verifican la exactitud de la elección del umbral. Los resultados se muestran en las figuras 5.3c, 5.3d a 5.5c y 5.5d). El análisis QQ-plot revela que la prueba de cola es aceptable de acuerdo con el umbral seleccionado. El ajuste de los puntos de muestreo en la cola cae en la función de la cola de la GPD, siendo casi una línea recta. Hay menos de cinco puntos de desviación y la tasa de error es muy baja, lo que indica que el umbral cumple con los requisitos. Los resultados para los modelos EVT de las rentabilidades de los EUA, Brent y Gas se muestran en la Tabla 5.5.

Table 5.5: Resultados EVT para los retornos de EUA, Brent y Gas.

	EUA		Brent		Gas	
	Up tail	Down tail	Up tail	Down tail	Up tail	Down tail
ξ	0,1891	-0,0535	0,0485	-0,0257	0,1171	-0,0039
β	0,4653	0,6146	0,4821	0,6909	0,5085	0,5349
$N(u)$	171	168	179	165	261	247
Log-Likelihood	-72,52	-77,25	-57,1	-99,76	-115	-91,47

Nota. La tabla muestra la estimación de los parámetros de la GPD (estimados para la cola superior e inferior) con ξ y β como los parámetros de forma y escala, respectivamente. $N(u)$ es el número de observaciones que exceden el umbral u .

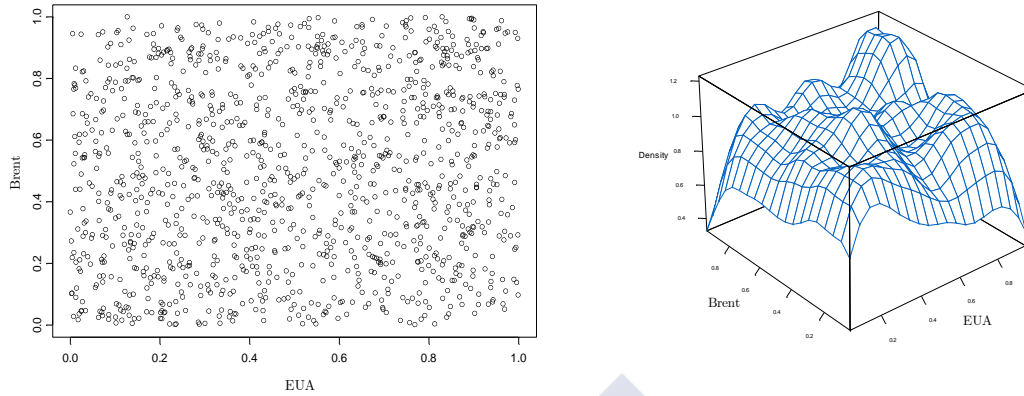
5.5.3 Resultados de modelos Cópulas

La Figura 5.7 representa un diagrama de dispersión para los precios de EUA-Brent, EUA-gas y Brent-gas y la correspondiente estimación de la densidad cópula no paramétrica (véase [ecuación 5.25](#)). Estas estimaciones proporcionan evidencia gráfica de dependencia positiva entre los EUA y los precios del petróleo, una ligera dependencia positiva entre los EUA y los precios del gas y, por último, la dependencia positiva entre los precios del Brent y el gas. Además, no hay evidencia gráfica clara de la dependencia de la cola.

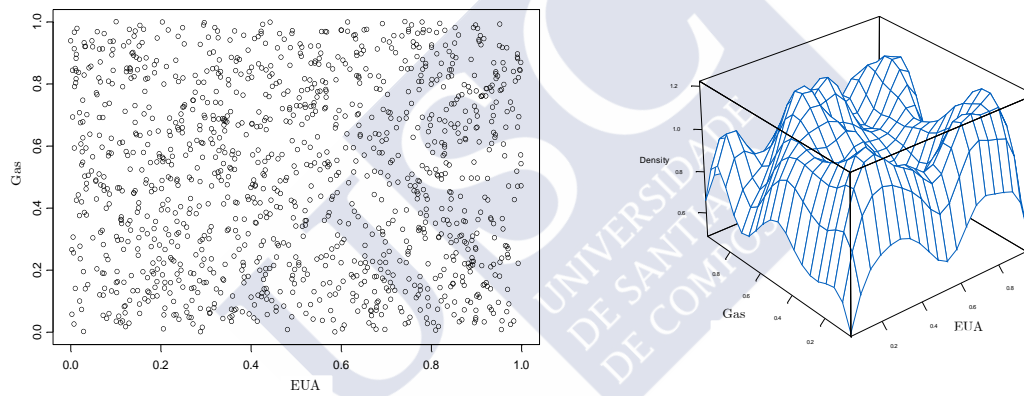
Los resultados de los modelos cópula paramétricos se reportan en la Tabla 5.6. Al examinar las cópulas simétricas, el parámetro de dependencia para la cópula Gaussiana fue positivo, significativo y consistentemente cercano al coeficiente de correlación lineal para los pares EUA-Brent y Brent-Gas, mientras

Figure 5.7: Cópula empírica para los EUA y Brent y Gas.

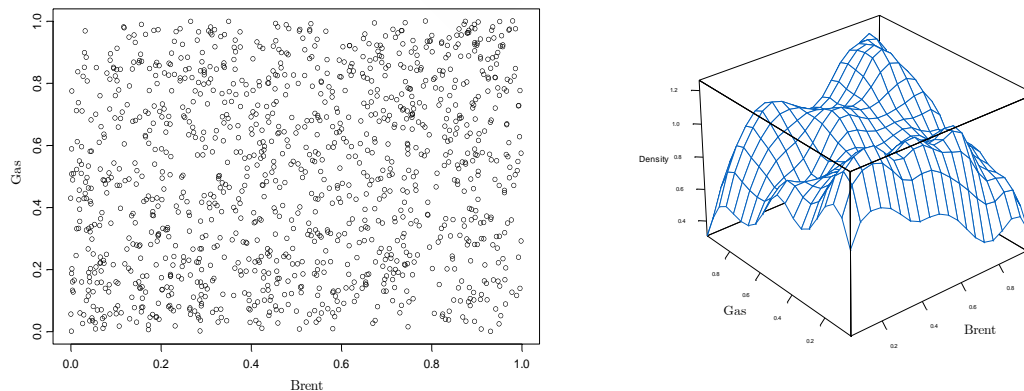
Panel A: Rentabilidades EUA-Brent.



Panel B: Rentabilidades EUA-Gas.



Panel C: Rentabilidades Brent-Gas.



que para EUA y Gas era negativo y cercano a cero. Los grados de libertad para la cópula t de Student fueron elevados, por lo que esta cópula converge a la Gaussiana, proporcionando así una primera evidencia de la no dependencia de

cola. Las estimaciones de los parámetros de dependencia para la cópula Clayton (α) y la Gumbel (δ) fueron significativos y reflejan la dependencia positiva entre los pares EUA-Brent y Brent-Gas, mientras que en EUA-Gas los parámetros estimados indican la falta de dependencia. La estimación de los parámetros para la cópula BB7 indicó que todos eran significativos, proporcionando evidencia de la dependencia de cola asimétrica. Por último, las estimaciones para la cópula Gaussiana con parámetro cambiante en el tiempo reportaron cierta evidencia de dependencia variable en el tiempo para los pares EUA-Brent y Brent-Gas y evidencian la no dependencia de EUA-Gas. En la comparación de las diferentes estructuras de dependencia, el AIC y el estadístico [Genest et al. \(2009\)](#) indicó que la cópula Gaussiana era el mejor modelo para EUA-Brent, la cópula Gaussiana también fue el mejor modelo de rendimiento para EUA-Gas de acuerdo al AIC a pesar de que la cópula BB7 ha ofrecido mejores resultados de acuerdo al estadístico Genest et al. Para el par Brent-Gas, la cópula Gaussiana también ofreció el mejor resultado, pero con parámetros variables en el tiempo de acuerdo con el AIC. En base a este análisis se pueden extraer dos conclusiones: (a) la dependencia entre los EUA y los combustibles fósiles es débil, principalmente para el gas (la dependencia es mayor entre los combustibles fósiles), y (b) no existe una dependencia extrema de los mercados de EUA y de los combustibles fósiles, siendo la cópula Gaussiana el modelo más apropiado para capturar la relación de dependencia.

5.5.4 Resultados para el VaR y ES

En la investigación sobre los mercados financieros, es común analizar la situación de riesgo en general sin tener en cuenta el riesgo de eventos extremos. Los eventos extremos representan grandes pérdidas para los inversores. Por lo tanto, el uso de EVT en la gestión del riesgo de mercado es de gran importancia práctica. En particular, la comparación de los resultados del VaR y ES para el modelo ARMA-t-EGARCH y el modelo EVT tiene interés práctico para los gestores de riesgos, ya que pueden revelar qué método es mejor para describir el riesgo de mercado. La Tabla 5.7 reporta los resultados del VaR y ES (ver ecuaciones 5.7 y 5.8) que surgen del modelo ARMA-t-EGARCH. Del mismo modo, a partir de las ecuaciones 5.15 y 5.16 se obtuvo el VaR y ES para el umbral establecido en cada uno de los tres mercados que utilizan EVT. Los resultados presentados en las Tablas 5.7 y 5.8 indican que las estimaciones del

VaR y ES basado en los residuales estandarizados del modelo ARMA-t-EGARCH son bastante cercanos a las estimaciones basadas en GPD para $p=0.95$, mientras que para $p=0.99$, el VaR y ES basado en el modelo ARMA-t-EGARCH son un poco más pequeños que los valores basados en la GPD.

Table 5.6: Estimación de modelos cópulas.

		EUA-Brent	EUA-Gas	Brent-Gas
Gaussian copula	ρ	0,119 (0,028)*	-0,004 (0,001)*	0,170 (0,027)*
	AIC	-15,83	1,97	-34,13
	Genest	0,0414	0,0604	0,0601
		-		
Student-t copula	ρ	0,122 (0,028)*	-0,005 (0,001)*	0,171 (0,028)*
	ν	500 (136,36)*	500 (1,43)*	76,426 (21,26)*
	AIC	-13,66	4,00	-32,37
	Genest	0,0415	0,0606	0,0605
Clayton copula	α	0,115 (0,034)*	0,001 (0,046)*	0,178 (0,037)*
	AIC	-11,38	2,00	-26,40
	Genest	0,0604	0,0590	0,0872
Gumbel copula	δ	1,058 (0,019)*	1,001 (0,032)*	1,098 (0,021)*
	AIC	-7,11	2,00	-28,33
	Genest	0,0653	0,0591	0,0748
BB7 copula	θ	1,015 (0,031)*	1,001 (0,040)*	1,061 (0,032)*
	δ	0,108 (0,038)*	0,001 (0,093)	0,145 (0,040)*
	AIC	-9,63	4,15	-28,92
	Genest	0,0536	0,0587	0,0666
TVP Gaussian	Ψ_0	0,379 (0,119)*	-0,012 (0,087)	0,613 (0,117)*
	Ψ_2	0,402 (0,250)	0,119 (0,239)	0,684 (0,127)*
	Ψ_1	-1,541 (0,588)*	-1,144 (1,445)	-2,068 (0,020)*
	AIC	-14,36	5,75	-46,36
	Genest	0,0630	0,0623	0,1859

Nota. La tabla muestra las estimaciones de ML para los diferentes modelos cópula utilizando precios diarios de los EUA, petróleo Brent y el gas para el período del 2 enero de 2008 al 31 octubre de 2012. Se proporcionan el error estándar (entre paréntesis), el AIC ajustado para el sesgo de muestra pequeña y el estadístico Genest et al. (2009). El valor mínimo del AIC y del estadístico Genest indica el mejor ajuste cópula y se indica en negrita. TVP denota parámetro cambiante en el tiempo para la cópula Gausiana, q como en la nota de la Tabla 1 se fija en 10. Un asterisco (*) indica significación al nivel de 5%.

Por lo tanto, comparativamente el procedimiento habitual tiende a sobreestimar el VaR al nivel de confianza del 95% y 97% y subestimar el VaR a un nivel de confianza del 99%. Además, los resultados de las Tablas 5.7 y 5.8 confirman que el mercado de carbono tiene más riesgos a la baja que los mercados de petróleo crudo pero menos que el mercado del gas natural.

Table 5.7: Resultados para VaR y ES utilizando el modelo ARMA-t-EGARCH.

	EUA	Brent	Gas
VaR95%	1,6431	1,6307	1,6871
ES95%	2,0613	2,04	2,1104
VaR97%	1,8792	1,8667	1,9261
ES97%	2,2667	2,254	2,3184
VaR99%	2,3251	2,3123	2,3775
ES99%	2,6642	2,6512	2,7206

Nota. La tabla reporta información del VaR y del ES para los residuos estandarizados del modelo ARMA-t-EGARCH para los niveles de confianza del 95%, 97% y 99%. El VaR está dado por la ecuación (5.7) y el ES por la ecuación (5.8).

Table 5.8: Resultados para el VaR y ES utilizando la EVT.

	EUA	Brent	Gas
VaR95%	1,5231	1,5270	1,5989
ES95%	2,2190	2,0606	2,2807
VaR97%	1,8258	1,7896	1,9158
ES97%	2,5922	2,3366	2,6396
VaR99%	2,5847	2,3769	2,6650
ES99%	3,5282	2,9539	3,4881

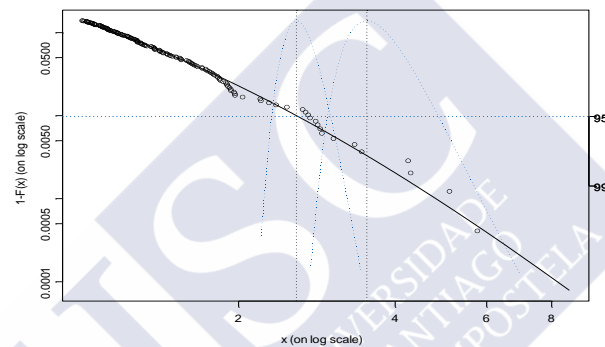
Nota. La tabla reporta información del VaR y del ES basado en la EVT al 95%, 97% y 99% de nivel de confianza. El VaR está dado por la ecuación 5.15 y ES por la (5.16).

La figura 5.8a muestra que las estimaciones del VaR y del ES para los EUA son 2,58 y 3,52, respectivamente, a un nivel de confianza de 99% y un umbral de 1, como se indica mediante la línea vertical. La línea punteada indica el nivel de confianza del 95% y las curvas representan el intervalo de confianza. El significado económico de este resultado es que la probabilidad de que una pérdida debido a cambios en el precio del carbono no excederá de 2,58% y las pérdidas esperadas fue de 3,52% al 1%. Resultados similares se muestran en las

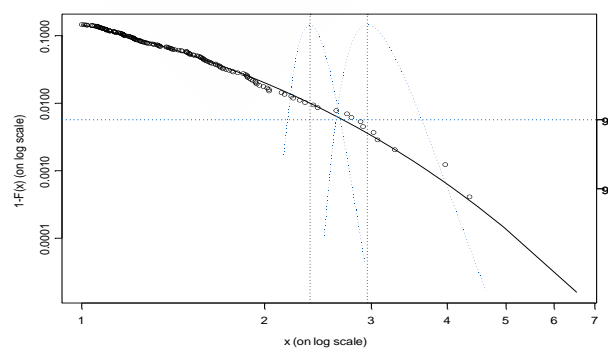
figuras 5.8b y 5.8c para el Brent y el gas a un nivel de confianza del 99%. Los retornos diarios de Brent podrían ser tan bajos como -1,527% y el valor esperado de pérdidas serían -2,06% al 5%. De manera similar, con 1% de probabilidad la rentabilidad diaria de Brent podría ser tan baja como el -2,37% con pérdidas previstas de -2,95%.

Figure 5.8: Estimación e Intervalo de confianza para VaR y ES basado en EVT al 99%.

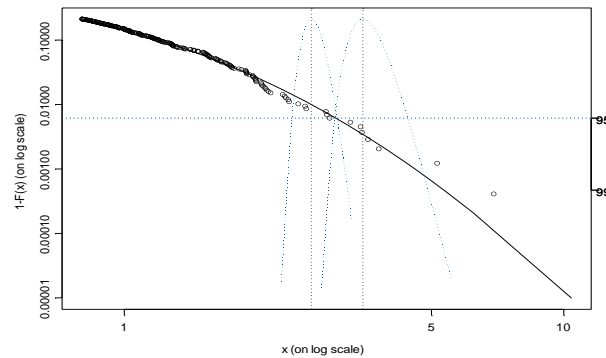
Panel A: VaR y ES basado en EVT para EUA



Panel B: VaR y ES basado en EVT para Brent



Panel C: VaR y ES basado en EVT para Gas



Los intervalos de confianza calculados utilizando el método delta se pueden visualizar en una gráfica conjuntamente con la estimación de la cola. El resumen de los resultados para los tres mercados se muestra en la Tabla 5.9. La sensibilidad de las estimaciones de VaR a los cambios en el valor de umbral u pueden ser investigados. La Figura 5.9 muestra esa sensibilidad para los tres mercados, indicando que las estimaciones de VaR al 99% son estables para los EUA cuando se considera un valor umbral $u < 1,28$, considerando un valor umbral $u < 1,10$ para el Brent y considerando un valor umbral $u < 0,95$ para el gas. En general, las estimaciones de VaR son bastante estables para una amplia gama de umbrales.

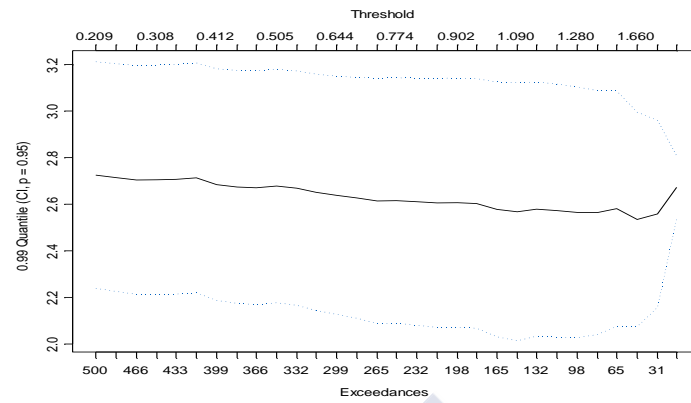
Table 5.9: Resultados de intervalos de confianza de VaR y ES basado en EVT para 95%, 99%.

	EUA		Brent		Gas	
	Upper CI	Lower CI	Upper CI	Lower CI	Upper CI	Lower CI
VaR95%	1,6273	1,4390	1,6194	1,4481	1,7126	1,4997
ES95%	2,5841	2,0104	2,2795	1,9113	2,5864	2,0839
VaR99%	3,0005	2,3208	2,6610	2,1838	3,0500	2,4080
ES99%	4,8381	2,9850	3,6261	2,6288	4,4039	3,0206

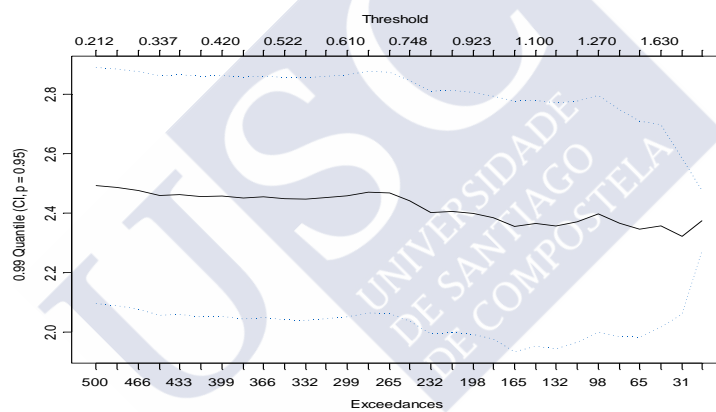
Nota. La tabla representa los resultados de los intervalos de confianza (superior e inferior) para el VaR y el ES basado en la EVT al nivel de confianza del 95% y 99%.

Figure 5.9: Sensibilidad de la estimación VaR 99% a los cambios en el umbral u

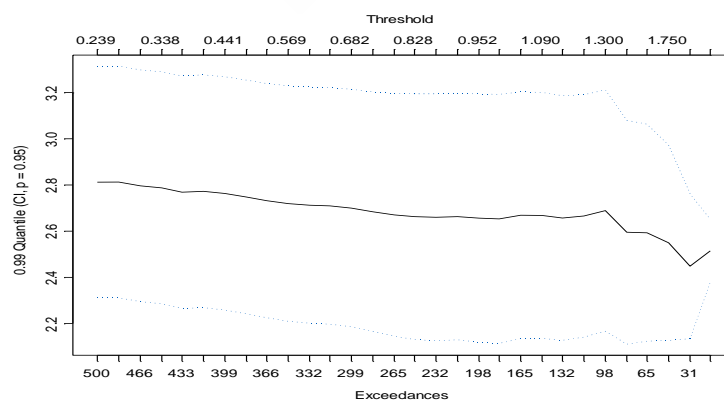
Panel A: EUA VaR.99% frente a u



Panel B: Brent VaR.99% frente a u



Panel C: Gas VaR.99% versus u



Asimismo, se obtuvieron las estimaciones del VaR y del ES teniendo en cuenta la estructura de dependencia entre los EUA y los mercados de

combustibles fósiles dada por la cópula. Es decir, se consideró las carteras de EUA-Brent y EUA-Gas como crucialmente relevantes para los inversores de los combustibles fósiles y para la gestión del riesgo financiero inducido por los movimientos de precios de los combustibles fósiles. Atendiendo a los objetivos de los inversores, podemos considerar diferentes tipos de carteras que se pueden comparar en términos de riesgo a la baja frente a una cartera simple (denominada Cartera I) compuesta sólo de petróleo o gas. Las carteras de EUA-combustibles fósiles que se consideran son: (a) Cartera II dada por la ecuación (5.17), (b) Cartera III dada por la ecuación (5.18) y (c) Cartera IV que es una cartera igualmente ponderada. Para cada una de las carteras se obtuvieron las medidas de riesgo a la baja utilizando el mejor modelo de cópula para los pares de EUA-Brent y EUA-Gas realizando simulaciones de Monte Carlo de la siguiente forma: (1) para cada par y en el tiempo t se simularon dos innovaciones partiendo de la mejor función cópula; (2) estos valores fueron transformados en residuos tipificados invirtiendo la función de distribución acumulada marginal para cada par, y (3) con los residuos tipificados simulados, se calculó los retornos de EUA y de Brent/Gas de los modelos marginales estimados y, para los pesos de cartera dadas, se calcula los retornos de la cartera por la ecuación (5.1). Este proceso se ha repetido 1000 veces para $t = 1, \dots, T$. Así, se obtuvo una distribución para las rentabilidades de las carteras y el VaR se obtuvo como el valor del percentil correspondiente para esta distribución y el ES se calculó como el valor medio para las situaciones en que los retornos de la cartera superaron el VaR.

Se compararon los resultados del riesgo de estas carteras que toma información de las distribuciones marginales y de la estructura de dependencia de tres maneras: (1) al comprobar la precisión del VaR para cada cartera mediante la prueba de razón de verosimilitud de la cobertura condicional correcta propuesto por [Christoffersen \(1998\)](#), (2) mediante la evaluación de las reducciones de VaR y ES en comparación a la Cartera I compuesta sólo por combustible fósil, y (3) mediante la evaluación de la siguiente función de pérdida del inversor para el VaR basado (véase [Reboredo et al, 2012](#)):

$$l_t = E \left[r_t - \text{VaR}_t(p) \right]^2 1_{\{r_t - \text{VaR}_t(p)\}}, \quad (5.26)$$

donde 1 es la función indicador habitual y donde el término cuadrático penaliza a las grandes desviaciones más que las pequeñas. Dado el diferencial de pérdida, $z_t = l_t - l_t^I$, se prueba la hipótesis nula de un diferencial de pérdida media cero contra la alternativa de un diferencial pérdida media negativo mediante el empleo de la prueba de los signos de un solo lado definida como sigue: $S = \left(\sum_{t=1}^T 1_{\{z_t \geq 0\}} - 0.5T \right) (0.25T)^{-0.5}$. Esta prueba se distribuye asintóticamente como una normal estándar y la hipótesis nula puede ser rechazada cuando $S < -1,645$.

Los resultados de la evaluación de riesgo para un nivel de confianza del 99% se muestran en la Tabla 5.10. La prueba de cobertura condicional indicó que las cuatro carteras muestran buenos resultados en términos del VaR, ya que la hipótesis nula de cobertura condicional correcta no se rechaza al nivel de significación del 5%, excepto para la cartera I que incluye sólo el gas. Al examinar el efecto sobre la reducción de VaR incluyendo los EUA en una cartera de petróleo o de gas, se encontró evidencia de reducción en el valor del riesgo promedio de la cartera de pesos óptimos y de la cartera igualmente ponderada de alrededor del 1,5% en comparación con la cartera I de petróleo crudo o de gas. Por lo tanto, la pérdida máxima esperada de la cartera se redujo para las carteras de combustibles fósiles. El ES para las carteras II y IV también se redujo. Sin embargo, para la cartera III, la cartera de coberturas, la reducción del valor en riesgo tuvo menos tamaño que para las restantes carteras, mientras que el tamaño de la reducción de ES fue mayor. Por último, la evidencia proporcionada por la prueba de los signos de un solo lado indicó que las carteras II-IV superaron a las carteras de combustibles fósiles. Estos resultados confirman la utilidad de incluir los EUA en carteras de combustibles fósiles con fines de gestión de riesgos.

Para obtener una visión más clara del efecto de los EUA en el riesgo de la cartera, se evaluó la eficacia de la reducción del riesgo de las carteras compuestas por los EUA y los combustibles fósiles mediante la comparación del porcentaje de reducción de varianza de las carteras II-IV frente a la cartera I como:

$$RE_{\text{variance}} = 1 - \frac{\text{Variance}_{\text{Portfolio j}}}{\text{Variance}_{\text{Portfolio I}}}, \quad (5.27)$$

Table 5.10: Evaluación de riesgo en carteras de combustibles fósiles y carteras compuestas por los EUA y combustible fósiles.

	Cartera I	Cartera II	Cartera III	Cartera IV
Brent				
Cond. Cov.	0,719	0,831	0,875	0,057
VaR Reduc.		0,015	0,006	0,010
ES	-0,015	-0,006	-0,016	-0,006
Sign Test		-34,98	-34,70	-35,04
Gas				
Cond. Cov.	0,021	0,127	0,121	0,240
VaR Reduc.		0,021	0,002	0,020
ES	-0,025	-0,014	-0,026	-0,009
Sign Test		-34,81	-34,92	-34,92

Nota. Esta tabla muestra los resultados para las ganancias de riesgos a la baja para carteras de combustibles fósiles-y-los EUA en comparación con una cartera compuesta sólo por combustibles fósiles (cartera I). Cartera de pesos II están dadas por la ecuación (5.17), la cartera III tiene ponderaciones dadas por la ecuación (5.18) y la cartera IV tiene el mismo peso para todos los activos. Cond. Cov. indica los valores de p para la prueba de cobertura condicional. VaR Reduc. es la reducción del VaR de la cartera con respecto a la cartera I (valores positivos indican reducción de VaR). ES la pérdida esperada condicionada a que la pérdida es mayor que el VaR. Sign Test es la prueba de los signos de un solo lado de las diferencias en la función de pérdida para las carteras II, III y IV, en comparación con la cartera I.

donde $j = II, III, IV$ y $\text{variance}_{\text{Portfolio } j}$ y $\text{variance}_{\text{Portfolio } I}$ son las varianzas en los rendimientos de la cartera j y la cartera I, respectivamente. Una ratio de reducción efectiva del riesgo más alta significa una mayor reducción de la varianza. La Tabla 5.11 presenta los resultados de eficacia de reducción del riesgo de las carteras II, III y IV para los diferentes combustibles fósiles. Los resultados indican la eficacia de la reducción del riesgo afectó, principalmente para las carteras II y IV, mientras que la reducción fue menor para cartera III. Estos resultados ponen de manifiesto la utilidad de la EUA en la reducción del riesgo en las carteras de los combustibles fósiles.

Table 5.11: Eficacia de reducción del riesgo de carteras de los EUA.

	Brent	Gas
Cartera II	0.346	0.485
Cartera III	0.018	0.001
Cartera IV	0.254	0.470

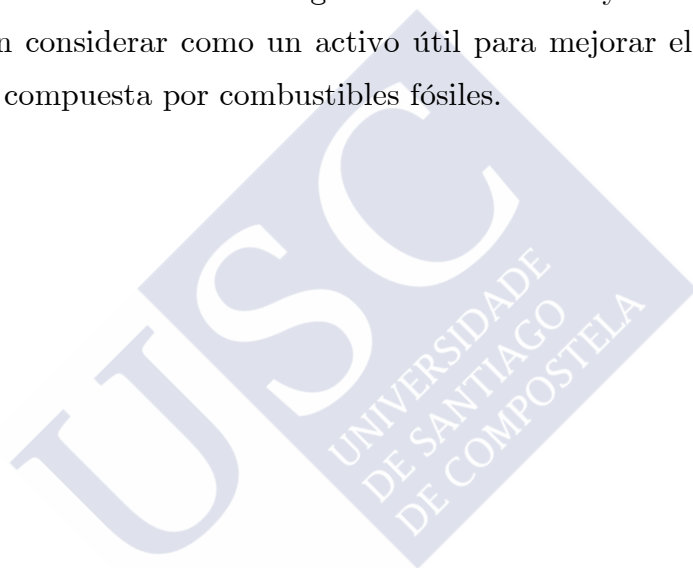
Notas. Esta tabla muestra los resultados de eficacia de reducción de riesgo para las carteras que contienen EUA y combustible fósiles en comparación con una cartera que incluye únicamente combustibles fósiles, calculado de acuerdo con la relación de efectividad de riesgo dada en la ecuación. (5.27). Cartera de pesos II están dadas por la ecuación (5.17), la cartera de pesos III están dadas por la ecuación (5.18) y Cartera IV tiene pesos idénticos.

5.6 Conclusiones

Desde la creación del mercado europeo del carbono, los derechos de emisión se han convertido en un activo negociable que ha ido ganando atractivo para los inversores en activos energéticos. Aunque varios artículos han investigado los factores determinantes de los precios del carbono y su relación con los precios de la energía, en particular los mercados de petróleo y el gas, ningún estudio había examinado hasta ahora las implicaciones de los vínculos entre el carbono y los mercados de combustibles fósiles para la gestión de riesgos a través de medidas de riesgo a la baja como VaR y el ES teniendo en cuenta la estructura de dependencia entre los mercados usando cópulas.

En este capítulo se ha caracterizado la volatilidad y la exposición al riesgo en los mercados de EUA, el petróleo crudo y gas natural utilizando modelos GARCH y EVT con el fin de obtener el VaR tradicional y el ES, medidas tradicionales que permiten cuantificar el riesgo de caídas en el mercado. Nuestra evidencia empírica, basada en datos diarios para el período comprendido entre enero de 1998 a octubre de 2012, indicó que los procedimientos tradicionales de evaluación del riesgo puede dar lugar a una infravaloración del riesgo a la baja, mientras que EVT proporciona una medida más exacta de esos riesgos. Asimismo, los resultados empíricos indican que el mercado de carbono tiene más riesgos a la baja que los mercados de crudo, pero menos que el mercado de gas natural. Al examinar la estructura de dependencia entre los EUA y los

combustibles fósiles (petróleo crudo y gas natural) a través de una serie de funciones cópula que capturan la dependencia de diferentes formas, hemos proporcionado evidencia de debilidad de la dependencia, principalmente para el gas (la dependencia es mayor entre los combustibles fósiles) y no hay dependencia extrema de mercado entre los EUA y los precios de los combustibles fósiles, evidencia que es consistente con la interdependencia y no efectos de contagio entre los EUA y los precios de los combustibles fósiles. En cuanto a las implicaciones prácticas de esta relación de dependencia para la gestión riesgo, los resultados apuntan a la utilidad de los EUA para la reducción del riesgo de cartera dado que las carteras configuradas por EUA y combustibles fósiles experimentaron reducciones significativas de VaR y ES. Por lo tanto, los EUA se pueden considerar como un activo útil para mejorar el riesgo a la baja de una cartera compuesta por combustibles fósiles.



Capítulo 6

Paridad cubierta de interés: Un análisis con valores extremos y cópulas

6.1 Introducción

La paridad cubierta de interés (CIP) afirma que la rentabilidad de dos activos con las mismas características de riesgo y negociados en dos monedas diferentes debe ser igual si la rentabilidad del activo negociado en moneda extranjera está cubierta frente a las fluctuaciones en el tipo de cambio. Por lo tanto, la CIP es una condición de no arbitraje que implica movimientos conjuntos entre la rentabilidad de dos activos que es dependiente del comportamiento del mercado de cambio de divisas.

Existe una rama de la literatura empírica que examina el comportamiento de los mercados de divisas y los diferenciales en los tipos de interés entre activos con el fin de detectar la existencia de oportunidades de arbitraje. La mayoría de los estudios concluyen que las desviaciones de la CIP son de corta duración debido a la eficiencia en los mercados de divisas, a pesar de que algunas desviaciones de la CIP pueden persistir en tiempos de incertidumbre y confusión. Los estudios iniciales de [Frenkel y Levich \(1977\)](#) y [Taylor \(1989\)](#) proporcionan evidencia de que, en periodos de relativa estabilidad monetaria, la CIP tiende a permanecer dentro de un rango consistente con los costes de

transacción, mientras que en períodos turbulentos en el mercado de divisas las desviaciones de la CIP son más grandes y dan lugar a oportunidades de arbitraje durante períodos cortos de tiempo.

Sin embargo, otros estudios detectan desviaciones de la CIP que son grandes y persistentes, que exceden los costes de transacción y ofrecen posibilidades de obtener beneficios de arbitraje. Estos estudios identifican períodos específicos en los que la condición de paridad falla (véase, por ejemplo, [Balke y Wohar, 1998](#); [Peel y Taylor, 2002](#); [Marshall et al., 2008](#)), especialmente períodos en los que se producen movimientos abruptos en los mercados como en el caso de la crisis financiera reciente (véase, por ejemplo, [Akram et al., 2008, 2009](#); [Gemberg et al., 2009](#); [Mancini Griffoli y Ranaldo, 2009](#); [McAndrews y Sarkar, 2009](#); [Spencer, 2009](#)). [Baba y Packer \(2009\)](#) investigaron los efectos de la inestabilidad en el mercado monetario durante el período 2007-2008 sobre la condición de CIP entre el dólar americano y el euro en el mercado de swaps de tipos de cambio, proporcionando evidencia empírica de desviaciones elevadas y persistentes de la CIP durante la crisis. Estas desviaciones se asocian con diferencias en el riesgo de contrapartida entre las instituciones financieras europeas y las estadounidenses. Del mismo modo, [Fong et al. \(2010\)](#) encontraron desviaciones positivas de la CIP que se explican como una compensación por la liquidez y el riesgo de crédito, por lo que los beneficios de arbitraje desaparecen una vez que tenemos en cuenta esta prima de riesgo.

Todos los estudios mencionados anteriormente han analizado las desviaciones de la CIP en términos de desviaciones medias y, en algunos casos, centrando el análisis de las desviaciones en períodos de tiempo específicos como la crisis financiera de 2007-2008. La investigación empírica sobre la CIP desarrollada en este capítulo se diferencia de los análisis anteriores en que centra su atención en una dimensión de la CIP no analizada hasta ahora: si la CIP se verifica, entonces el diferencial de tipos de interés y el premio o descuento a plazo en el mercado de divisas deberían moverse conjuntamente no sólo en promedio sino también en los casos de movimientos extremos al alza o a la baja en los mercados financieros; es decir, debería existir dependencia de cola. Este punto es relevante puesto que, aunque los costes de transacción son independientes de la forma que tenga la distribución de probabilidad, la CIP puede mostrar patrones diferentes en las diversas regiones de la distribución de

probabilidad debido a que el riesgo de liquidez y, en particular, el riesgo de mercado cambia dependiendo del lugar de la distribución de probabilidad de la rentabilidad en el que nos encontremos. Este análisis también difiere de las anteriores contribuciones en el hecho de que se modelizan las desviaciones extremas univariantes con respecto a la media de la distribución de probabilidad utilizando la teoría del valor extremo (EVT). Por lo tanto, el comportamiento de la rentabilidad en la cola de la distribución se caracteriza por medio de la distribución de valor extremo generalizado. Además, puesto que [McNeil et al. \(2005\)](#) demuestran que la relación de dependencia entre los valores extremos multivariantes se puede caracterizar en términos de cópulas, se estudia el comportamiento de cola conjunto de los diferenciales de los tipos de interés y el premio a plazo a través de las cópulas de valores extremos dado que proporcionan una medida de la dependencia extrema y por lo tanto una forma alternativa de detectar y contrastar la existencia de desviaciones de la CIP en las colas de la distribución bivalente.

Empíricamente se ha reexaminado la CIP en las colas de la distribución durante el período enero de 2000 a junio de 2012 a partir de información para el tipo de cambio spot del dólar americano (USD) frente a la libra esterlina (GBP), el tipo de cambio forward o a plazo teniendo en cuenta los vencimientos de 1, 3, 6 y 12 meses y los tipos de interés del mercado monetario en Estados Unidos y en el Reino Unido considerando los mismos vencimientos que el tipo forward. Los resultados empíricos obtenidos apoyaron el cumplimiento de la CIP en las colas: los co-movimientos en los extremos son fuertes para todos los vencimientos y las pequeñas desviaciones que se observan en períodos cortos de tiempo puede ser atribuidos a los costos de transacción y el riesgo de contrapartida en estos mercados.

El resto del capítulo se organiza del siguiente modo: la sección 6.2 describe la EVT y los modelos cópula de valores extremos empleados en el análisis. En las secciones 6.3 y 6.4 se presentan los datos y se discuten los resultados obtenidos, respectivamente. Finalmente, la sección 6.5 presenta las conclusiones del capítulo.

6.2 Metodología

Sean $r_{t,t+s}^{\text{USD}}$, $r_{t,t+s}^{\text{GBP}}$, S_t , $F_{t,t+s}$ el tipo de interés en dólares, el tipo de interés de la libra esterlina, el tipo de cambio spot entre el dólar y la libra esterlina y el tipo de cambio forward determinado en el tiempo t para intercambiar en el tiempo $t+s$, respectivamente. La CIP establece la igualdad entre el tipo de interés del dólar americano y el tipo de interés cubierto de la libra esterlina de modo que:

$$1 + r_{t,t+s}^{\text{USD}} = \frac{F_{t,t+s}}{S_t} (1 + r_{t,t+s}^{\text{GBP}}). \quad (6.1)$$

Esta relación de equilibrio debe mantenerse en cualquier circunstancia del mercado dado que de lo contrario un arbitrajista podría obtener un beneficio sin riesgo negociando los dos activos denominados en diferentes monedas. Tomando logaritmos en (6.1), tenemos la igualdad entre la diferencia en los tipos de interés y la prima forward, dado por $(r_{t,t+s}^{\text{USD}} - r_{t,t+s}^{\text{GBP}})$ y $(f_{t,t+s} - s_t)$, respectivamente, donde las tasas de interés se expresan en base a la capitalización continua y las letras minúsculas denotan las variables en logaritmos. En la literatura empírica, la forma habitual de contrastar la relación de equilibrio dada por (6.1) adopta la forma de una regresión (usualmente lineal) de los diferenciales en los tipos de interés sobre la prima forward, de modo que la CIP se mantiene cuando el coeficiente de la regresión es igual a uno, indicando así si la CIP se mantiene en promedio. Sin embargo, en este capítulo contrastamos (6.1) considerando las colas de la distribución de los diferenciales de tipos de interés y de la prima forward y se caracteriza la dependencia entre las colas utilizando cópulas. Seguidamente se describe la EVT para caracterizar las colas y las cópulas de valor extremo para medir la dependencia en las colas.

6.2.1 Teoría de los valores extremos

La EVT es una herramienta estadística que modeliza los máximos o los mínimos de una variable aleatoria, por lo tanto describe el comportamiento de las colas de la distribución. En la literatura se describen dos métodos que se utilizan ampliamente en la EVT (véase [Embrechts et al., 1997](#)): el método de máximos por bloques (BMM) y el análisis de picos sobre un umbral (POT). El BMM modela directamente los máximos y mínimos de la distribución, mientras

que el POT se ocupa sólo de las observaciones que han excedido un umbral. En este capítulo se emplea el método BMM, por lo que se utiliza la distribución generalizada del valor extremo (GEV).

BMM identifica extremos de los datos eligiendo el valor máximo (o el mínimo) durante un período de tiempo determinado (una semana, un mes, un trimestre, etc.) Estos datos configuran la muestra de eventos extremos (máximos o mínimos). Una vez que tenemos la muestra de máximos, si el bloque de máximos es i.i.d, entonces converge en distribución a una función de distribución no degenerada $H(\cdot)$ bajo normalización apropiada que se denomina distribución de valor extremo, dada por:

$$H(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp\left\{-\left(1 + \xi(x - \mu) / \sigma\right)^{-1/\xi}\right\}, \quad (6.2)$$

donde μ , σ y ξ son los parámetros de ubicación, escala y de forma, respectivamente, y $(1 + \xi(x - \mu) / \sigma) > 0$. H pertenece a una de las tres distribuciones de valores extremos estándar conocidos como la familia Fréchet, Weibull y Gumbel. El parámetro de forma, ξ , determina el índice de cola, lo que indica el grosor de la cola de la distribución del valor extremo. Cuando $\xi = 0$ tenemos la distribución Gumbel, es decir, la distribución de tipo I; cuando $\xi > 0$ tenemos la distribución Fréchet, es decir, el tipo de distribución II y cuando $\xi < 0$ tenemos la distribución Weibull, es decir, el tipo de distribución III.

La elección del tamaño del bloque tiene importantes implicaciones para los resultados que se obtienen con esta metodología: el uso de bloques muy pequeños genera una serie de valores extremos con muchas observaciones, pero puede producir estimaciones sesgadas debido a la pobre aproximación de acuerdo con el teorema del límite presentado en [Fisher y Tippet \(1928\)](#); contrariamente, utilizando tamaños de bloques grandes reduce este problema pero se genera una serie de valores extremos con pocas observaciones, lo que puede producir estimaciones con grandes varianzas. En el estudio realizado se han utilizado bloques de tamaño semanal.

Los parámetros de la GEV se obtienen maximizando el logaritmo de la función de verosimilitud, que para un bloque de tamaño m y $\xi \neq 0$ es:

$$l(\mu, \sigma, \xi) = \arg \max \left\{ -m \ln \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^m \ln \left(1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^m \ln \left(1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \right\}, \quad (6.3)$$

donde x_i es el bloque máximo (o menos el máximo). La maximización de (6.3) está sujeta a $\sigma > 0$ y $1 + \xi(x_i - \mu) / \sigma > 0$.

6.2.2 Cópulas

La teoría de las cópulas se remonta a [Sklar \(1959\)](#), quien demostró la existencia de una función multivariante C , denominada cópula, tal que para una función de distribución conjunta G para las variables aleatorias X e Y con distribuciones marginales F_X y F_Y , tenemos que C y G están relacionadas por:

$$G(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \quad (6.4)$$

El recíproco del teorema de Sklar es muy útil en la modelización de las distribuciones multivariantes, ya que implica que si se combinan dos distribuciones marginales diferentes con cualquier cópula C habremos definido una distribución bivariada válida. Sea G una función de distribución conjunta con distribuciones marginales continuas F_X y F_Y y una cópula C que satisface el teorema de Sklar, luego para $u \in [0, 1]$ y $v \in [0, 1]$ se tiene que:

$$C(u, v) = G(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)), \quad (6.5)$$

donde $u = F_X(x)$ y $v = F_Y(y)$ son distribuciones de X y Y .

Se obtienen cópulas de valor extremo mediante la adopción de la estructura de dependencia para el máximo multivariado. La distribución extrema bivariada G se puede obtener a través de una cópula de valor extremo C_0 como:

$$G(x, y) = C_0(H_x(x; \mu_1, \sigma_1, \xi_1), H_y(y; \mu_2, \sigma_2, \xi_2)), \quad (6.6)$$

donde μ_j , σ_j y ξ_j para $j=1, 2$ son los parámetros de la GEV y H_h para $h=x, y$ son las distribuciones GEV marginales. La cópula C_0 de H existe y se verifica que:

$$C_0(u^t, v^t) = C_0^t(u, v) \quad t > 0. \quad (6.7)$$

[Pickands \(1975\)](#) mostró que una cópula bivalente es una cópula de valor extremo si y sólo si se cumple que:

$$C_0(u, v) = P(H_x(x) \leq u, H_y(y) \leq v) = \exp\{\ln(uv)A(\ln v / \ln(uv))\}, \quad (6.8)$$

donde A se denomina la función de dependencia, que se define por:

$$A(t) = \int_0^1 \max((1-x)t, x(1-t)) dH(x), \quad (6.9)$$

que para una medida H en $[0,1]$ satisface: $\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1, 0 \leq t \leq 1$. La cópula es una cópula independiente cuando $A(t) = 1$ para cualquier t , mientras que para $A(t) = \max(t, 1-t)$ la cópula representa la relación de dependencia perfecta.

La dependencia de cola, que mide la probabilidad de que dos variables estén en las colas conjuntas superiores e inferiores de su distribución bivariada, es proporcionada por la cópula. Asumiendo una distribución GEV, la dependencia de la cola superior e inferior se puede medir como:

$$\lambda_u = \lim_{p \rightarrow 1} P(X > H_x^{-1}(p) | Y > H_y^{-1}(p)) = \lim_{p \rightarrow 1} [1 - 2p + C_0(p, p)] / (1-p), \quad (6.10)$$

$$\lambda_l = \lim_{p \rightarrow 0} P(X < H_x^{-1}(p) | Y < H_y^{-1}(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} C_0(p, p) / p, \quad (6.11)$$

donde H_x^{-1} y H_y^{-1} son las funciones cuantiles marginales y λ_u y λ_l son las medidas de dependencia en la parte superior (derecha) e inferior (izquierda) de la distribución, respectivamente. Las colas superiores son asintóticamente dependientes cuando $\lambda_u \in (0, 1]$, mientras que para $\lambda_u = 0$ se dice que son asintóticamente independientes (de manera similar para las colas inferiores). La relación entre la dependencia de cola superior y la función de dependencia $A(t)$ está dada por $\lambda_u = 2 - 2A(1/2)$.

Se han utilizado tres cópulas de valores extremos: Gumbel, Galambos y HuslerReiss, que satisfacen (6.7). La cópula Gumbel está dada por:

$$C(u, v, \delta) = \exp(-[(-\ln u)^\delta + (-\ln v)^\delta]^{1/\delta}), \quad \delta \in [1, +\infty), \quad (6.12)$$

donde δ es el parámetro de dependencia. Esta cópula muestra una dependencia fuerte de cola derecha y cero dependencia de cola izquierda. La cópula Galambos está dada por:

$$C(u, v, \delta) = uv \exp([(-\ln u)^{-\delta} + (-\ln v)^{-\delta}]^{-1/\delta}), \quad \delta \in [0, +\infty), \quad (6.13)$$

y la cópula HuslerReiss es definida por:

$$C(u, v, \delta) = \exp \left\{ -\tilde{u} \Phi \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \delta \ln \left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} \right) \right) - \tilde{v} \Phi \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \delta \ln \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} \right) \right) \right\}, \quad \delta \in [0, +\infty), \quad (6.14)$$

donde $\tilde{u} = -\ln u$, $\tilde{v} = -\ln v$ y Φ es la distribución normal estándar. La función de dependencia, $A(t)$, para cada una de estas cópulas está dada, respectivamente, por:

$$A(t) = \left(t^\delta + (1-t)^\delta \right)^{1/\delta}, \quad (6.15)$$

$$A(t) = 1 - \left(t^{-\delta} + (1-t)^{-\delta} \right)^{-1/\delta}, \quad (6.16)$$

$$A(t) = t\Phi\left(\delta^{-1} + \frac{1}{2}\delta\ln\left(\frac{t}{1-t}\right)\right) + (1-t)\Phi\left(\delta^{-1} - \frac{1}{2}\delta\ln\left(\frac{t}{1-t}\right)\right). \quad (6.17)$$

Los parámetros cópulas fueron estimados utilizando el procedimiento en dos etapas denominado inferencia para las marginales (Joe y Xu, 1996): (a) se estiman primeramente los parámetros para los marginales y (b) se estiman los parámetros cópula mediante la maximización de la verosimilitud logarítmica de la función cópula:

$$\hat{\psi} = \arg \max \sum_{i=1}^m \ln(c(\hat{u}_i; \hat{v}_i; \psi)), \quad (6.18)$$

donde $\hat{u}_i = \hat{H}_X(x_i)$ y $\hat{v}_i = \hat{H}_Y(y_i)$ representan los valores estimados de las dos marginales.

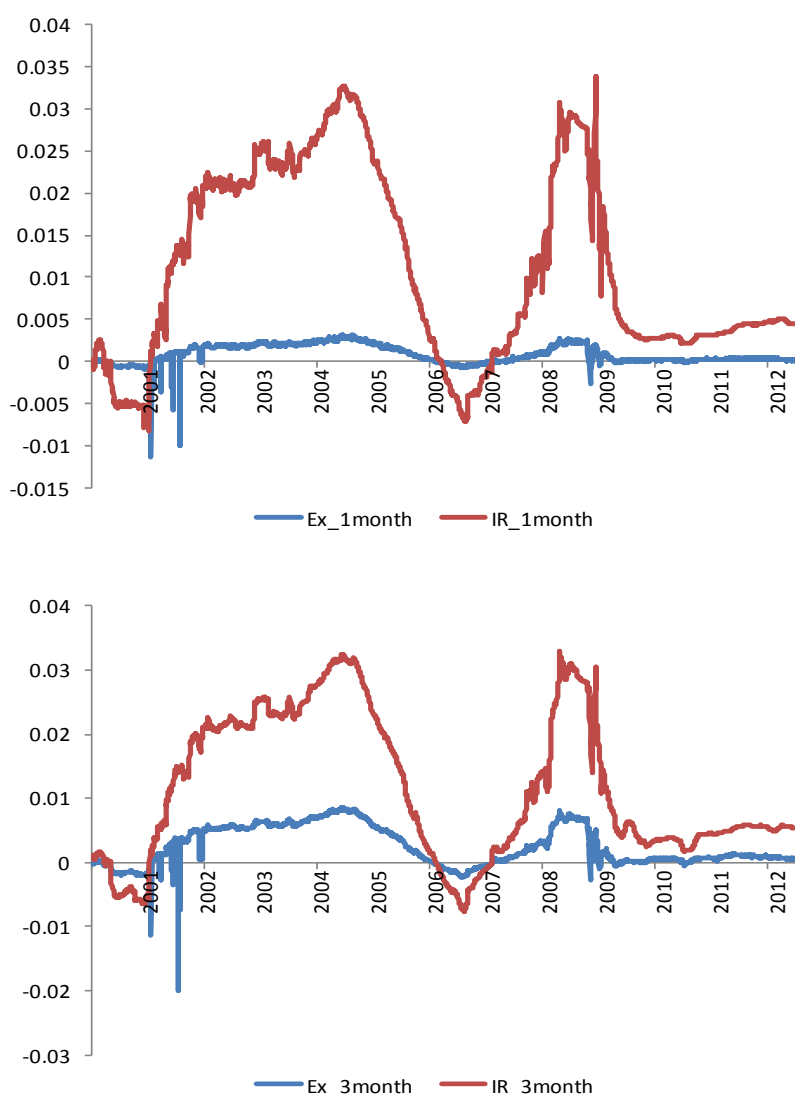
6.3 Datos

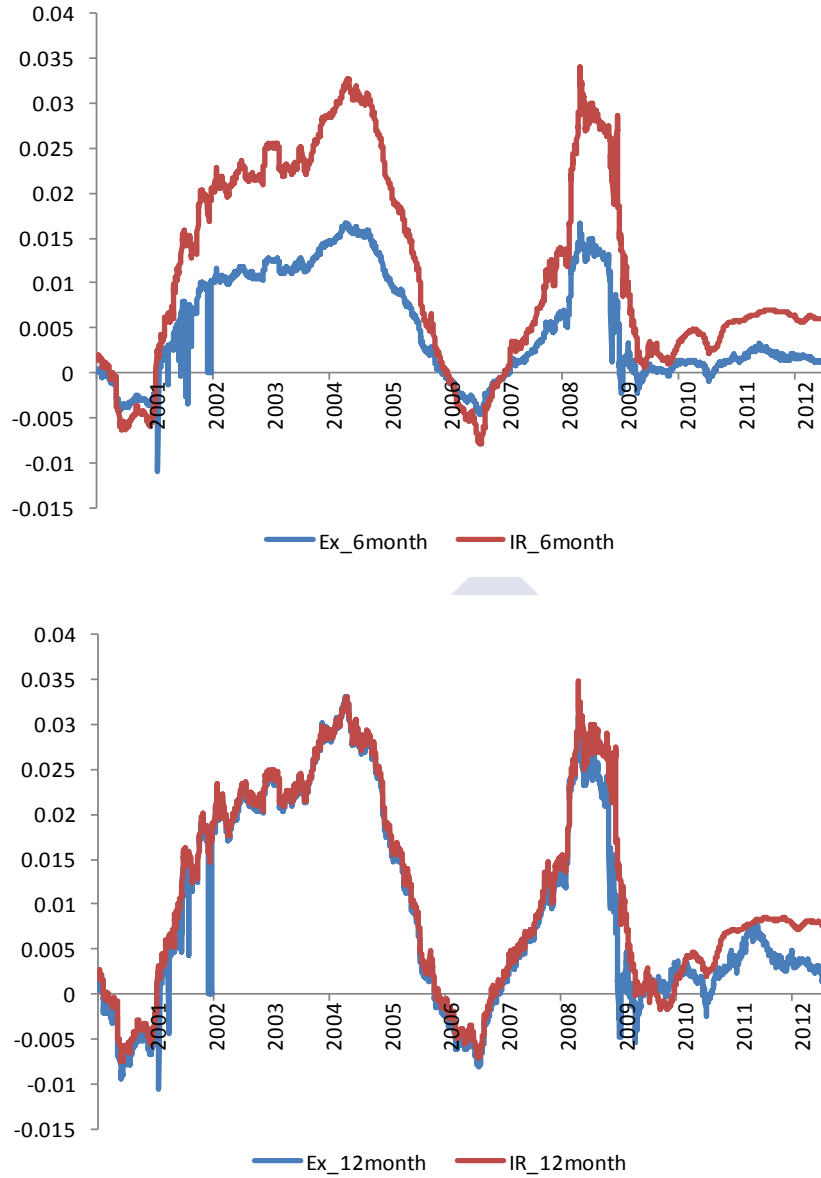
En el análisis se utiliza información sobre las tasas de cambio spot y a plazos de dos monedas, el dólar americano y la libra esterlina, con vencimientos de 1, 3, 6 y 12 meses. Estos datos fueron descargados de la página web del Banco de Inglaterra (<http://www.bankofengland.co.uk>). Los datos de tipos de interés para plazos de 1, 3, 6 y 12 meses para Estados Unidos e Inglaterra fueron descargados de la página web del Banco de la Reserva Federal de Saint Louis (<http://www.frbstlouis.com>). Para estudiar la dependencia extrema entre $(r_{t,t+s}^{\text{USD}} - r_{t,t+s}^{\text{GBP}})$ y $(f_{t,t+s} - s_t)$, se consideraron los valores diarios de máximos y mínimos de estas variables en bloques semanales, denotado por R_{ir}^+ y R_{ir}^- para el máximo y el mínimo del diferencial de tasas de interés, respectivamente, y R_{ex}^+ y R_{ex}^- para el máximo y el mínimo de la prima forward, respectivamente. Por lo tanto, tenemos cuatro series para cada vencimiento.

La figura 6.1 muestra la dinámica temporal de rendimientos de diferenciales de tipo de cambio y diferenciales de tasas de interés para plazos de

1, 3, 6 y 12 meses, respectivamente durante el período de muestreo. Hay una tendencia bastante consistente con los movimientos al alza y a la baja, sobre todo para los vencimientos largos. Los coeficientes de correlación asociados al diferencial de tasas de interés y prima forward son altos y cercanos a la unidad, apoyando así la fuerte dependencia sugerida por la CIP. Sin embargo, podemos observar algunos subperíodos de fuertes turbulencias en el mercado de divisas y en los tipos de interés, principalmente a finales de 2007 y el período 2008-2009, con fuertes aumentos y disminuciones en las tasas de interés. Se observó un comportamiento más estable para los vencimientos a plazo de 6 y 12 meses y las pequeñas desviaciones observadas podrían atribuirse a los costes de transacción en esos mercados.

Figure 6.1: Diferenciales de tipos de interés y prima forward para vencimientos de 1, 3, 6 y 12 meses.





6.4. Resultados empíricos

6.4.1 Resultados para la distribución GEV

Las estimaciones de los parámetros para el modelo GEV se reportan en la Tabla 6.1. Para todos los plazos, las estimaciones de la desviación estándar son relativamente bajas, por lo que la elección de bloque es adecuado para la estimación de parámetros. Las estimaciones para el parámetro de forma, ξ , fueron menos que cero, indicando así que la GEV corresponden al tipo III o bien distribución de Weibull. El análisis residual confirmó que el GEV se ajusta bien a los datos, por lo que se puede obtener las variables estimadas \hat{u} y \hat{v} con el fin de capturar la dependencia a través de la cópula.

Table 6.1: Parámetros estimados para los modelos distribución GEV.

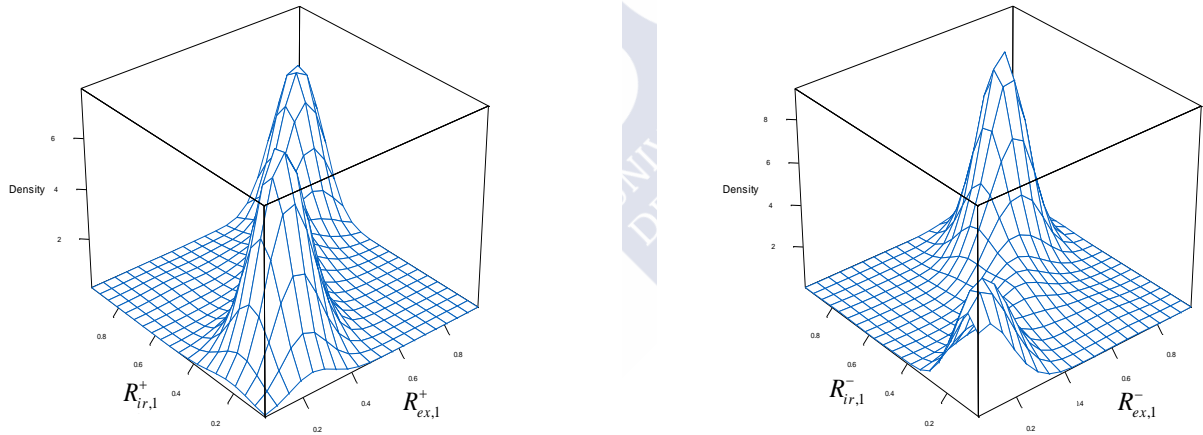
	μ	σ	ξ	Log-lik.
$R_{ex,1}^+$	0,0004 [0,000]	0,0008 [0,000]	0,0165 [0,001]	-3456,382
$R_{ex,1}^-$	-0,0012 [0,000]	0,0010 [0,000]	-0,0192 [0,017]	-3358,006
$R_{ir,1}^+$	0,0064 [0,000]	0,0098 [0,000]	-0,0938 [0,061]	-1940,287
$R_{ir,1}^-$	-0,0012 [0,000]	0,0122 [0,000]	-0,5610 [0,008]	-1972,229
$R_{ex,3}^+$	0,0012 [0,0001]	0,0024 [0,000]	-0,0008 [0,046]	-2786,060
$R_{ex,3}^-$	-0,0037 [0,000]	0,0030 [0,000]	-0,0892 [0,015]	-2702,640
$R_{ir,3}^+$	0,0068 [0,0005]	0,0099 [0,0003]	-0,1265 [0,055]	-1942,187
$R_{ir,3}^-$	-0,0135 [0,000]	0,0123 [0,000]	-0,5586 [0,011]	-1968,945
$R_{ex,6}^+$	0,0024 [0,0002]	0,0048 [0,0001]	-0,0049 [0,051]	-2358,880
$R_{ex,6}^-$	-0,4717 [0,000]	0,0080 [0,000]	-0,4717 [0,000]	-2296,570
$R_{ir,6}^+$	0,0068 [0,0005]	0,0099 [0,0003]	-0,1285 [0,0540]	-1946,750
$R_{ir,6}^-$	-0,5494 [0,000]	0,0121 [0,000]	-0,5494 [0,011]	-1973,380
$R_{ex,12}^+$	0,0047 [0,0004]	0,0091 [0,0003]	-0,0176 [0,051]	-1957,460
$R_{ex,12}^-$	-0,0115 [0,000]	0,0120 [0,000]	-0,5360 [0,004]	-1980,440
$R_{ir,12}^+$	0,0069 [0,0004]	0,0098 [0,0003]	-0,1516 [0,052]	-1957,390
$R_{ir,12}^-$	-0,0131 [0,000]	0,0119 [0,000]	-0,5513 [0,012]	-1985,840

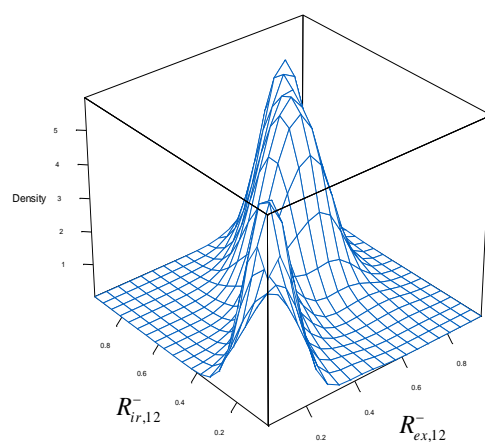
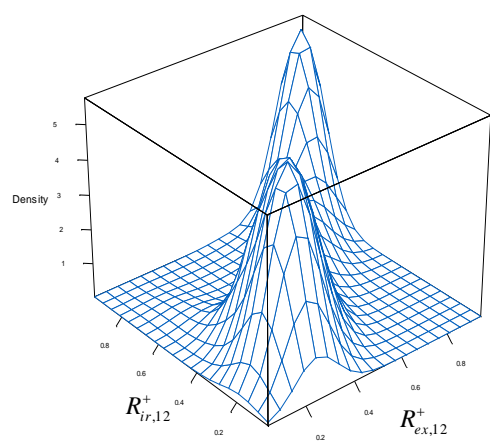
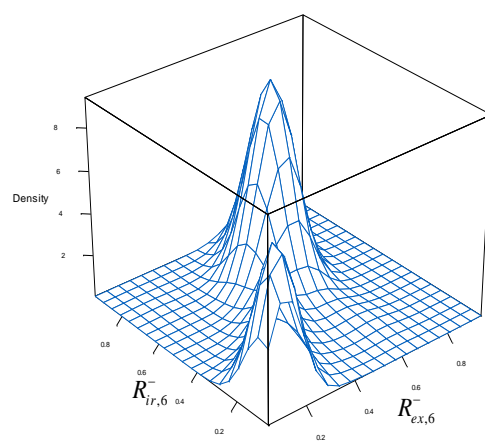
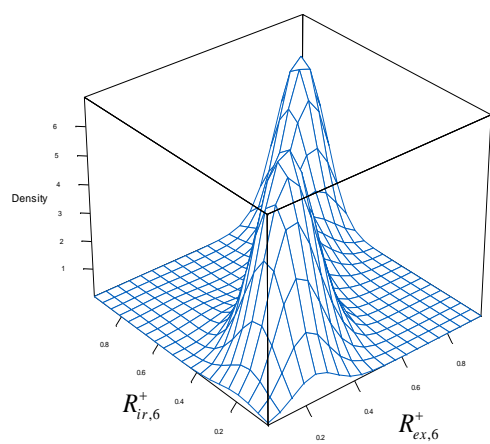
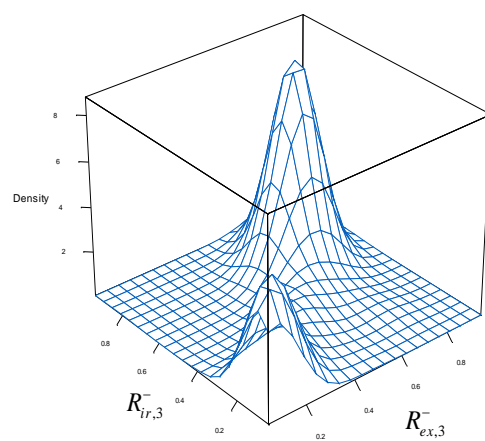
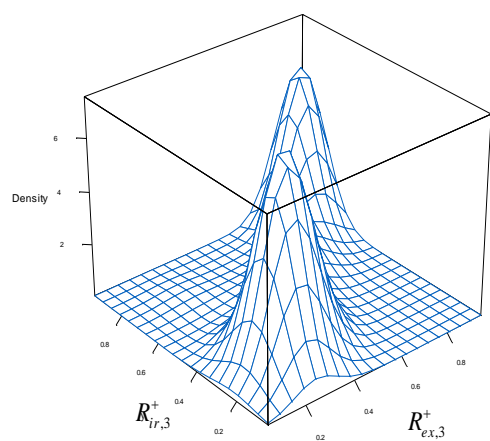
Notas. Este tabla presenta las estimaciones de ML y desviación estándar [entre corchetes] para los parámetros de la distribución marginal GEV dada por la ecuación (6.2). μ , σ y ξ son los parámetros de ubicación, escala y forma, respectivamente. Log-lik. denota el valor de la verosimilitud.

6.4.2 Resultados para los modelos cópulas

Antes de presentar los parámetros estimados para las cópulas paramétricas de valores extremos, se proporciona en primer lugar la estimación de la densidad cópula no-paramétrica del diferencial de tipos de interés y tipos a plazos para los diferentes vencimientos. La Figura 6.2 muestra la densidad cópula no paramétrica para $(R_{ex}^+ - R_{ir}^+)$ y $(R_{ex}^- - R_{ir}^-)$ para todos los plazos, mostrando evidencia gráfica de una fuerte dependencia positiva de cola asintótica entre R_{ex}^+ y R_{ir}^+ , y R_{ex}^- y R_{ir}^- , lo cual es coherente con la hipótesis de que la CIP se mantiene en la cola y no hay asimetrías en la CIP.

Figure 6.2: Densidades empíricas no paramétricas para $(R_{ex}^+ - R_{ir}^+)$ y $(R_{ex}^- - R_{ir}^-)$ considerando los vencimientos a plazo de 1, 3, 6 y 12 meses.





Los resultados de cópula paramétricas de valor extremo para todos los vencimientos se presentan en la Tabla 6.2. La evidencia empírica respalda la dependencia asintótica fuerte. Todos los parámetros de cópula fueron significativos y los valores estimados para la función de la dependencia, $A(1/2)$, indican la dependencia asintótica es casi perfecta, dado que sus valores son alrededor de 0,5. Se observa que esta dependencia es bastante similar en las colas superiores y en las colas inferiores, lo que proporcionan evidencia a favor de la hipótesis de CIP en ambas colas. Del mismo modo, la dependencia de cola superior tomó valores coherentes con la fuerte dependencia, valores que van desde 0,81 a 0,92. Además, los resultados de la tau de Kendall y la rho de Spearman para todas las cópulas proporcionan una evidencia que apoya la fuerte dependencia positiva entre los valores extremos, con valores que van desde 0,79 hasta 0,97. Estos resultados fueron comunes para todas las series y las especificaciones cópula consideradas.

Al comparar las diferentes estructuras de la dependencia, los valores del AIC indican que el modelo cópula Gumbel es el más adecuado para todas las series estudiadas. Por lo tanto, podemos concluir que la dependencia entre los valores extremos del diferencial de tipos de interés y de tipos forward es fuerte en la parte superior e inferior de sus respectivas distribuciones. Por lo tanto, la CIP se mantiene incluso bajo circunstancias extremas del mercado. Esta evidencia no concuerda con algunas investigaciones que muestran que la existencia de desviaciones persistentes en la CIP utilizando datos intradía para períodos de tiempo específicos cuando el riesgo a la baja aumenta notablemente (véase, por ejemplo, [Baba y Packet, 2009](#)). El contraste realizado muestra que esta persistencia desaparece cuando consideramos los datos de menor frecuencia, e incluso desaparece en ambos extremos de la distribución de probabilidad.

Table 6.2: Parámetros estimados para cópulas de valor extremo.

Copula		$R_{ex,1}^+ - R_{ir,1}^+$	$R_{ex,1}^- - R_{ir,1}^-$	$R_{ex,3}^+ - R_{ir,3}^+$	$R_{ex,3}^- - R_{ir,3}^-$
Gumbel	δ	9,510 (0,312)	4,878 (0,164)	8,379 (0,274)	4,875 (0,164)
	λ_u	0,924	0,833	0,913	0,840
	A	0,537	0,583	0,543	0,580
	tau	0,894	0,795	0,880	0,795
	rho	0,983	0,940	0,979	0,94
	AIC	-2219,21	-1168,64	-2070,26	-1168,64
Galambos	δ	8,830 (0,302)	4,157 (0,161)	7,693 (0,272)	4,157 (0,161)
	λ_u	0,924	0,819	0,913	0,827
	A	0,537	0,576	0,543	0,579
	tau	0,895	0,794	0,880	0,794
	rho	0,984	0,940	0,979	0,941
	AIC	-2214,41	-1168,52	-2066,61	-1168,52
HuslerReiss	δ	8,223 (0,240)	4,937 (0,153)	7,731 (0,227)	4,937 (0,153)
	λ_u	0,903	0,823	0,987	0,831
	A	0,548	0,582	0,551	0,581
	tau	0,869	0,788	0,861	0,788
	rho	0,976	0,939	0,973	0,939
	AIC	-1998,87	-1159,97	-1919,79	-1159,97

Table 6.2: (continuación).

Copula		$R_{ex,6}^+ - R_{ir,6}^+$	$R_{ex,6}^- - R_{ir,6}^-$	$R_{ex,12}^+ - R_{ir,12}^+$	$R_{ex,12}^- - R_{ir,12}^-$
Gumbel	δ	8,955 (0,293)	4,878 (0,164)	7,044 (0,229)	6,534 (0,219)
	λ_u	0,919	0,847	0,896	0,888
	A	0,54	0,576	0,551	0,556
	tau	0,888	0,795	0,858	0,846
	rho	0,981	0,94	0,971	0,966
	AIC	-2158,52	-1168,64	-1861,11	-1573,82
Galambos	δ	8,271 (0,283)	4,157 (0,161)	6,365 (0,226)	5,818 (0,216)
	λ_u	0,919	0,846	0,896	0,887
	A	0,54	0,576	0,551	0,556
	tau	0,888	0,794	0,858	0,846
	rho	0,982	0,941	0,971	0,966
	AIC	-2155,68	-1168,52	-1858,33	-1570,34
HuslerReiss	δ	8,403 (0,245)	4,937 (0,153)	6,692 (0,198)	6,338 (0,191)
	λ_u	0,905	0,839	0,881	0,874
	A	0,547	0,581	0,559	0,562
	tau	0,871	0,788	0,841	0,832
	rho	0,977	0,939	0,965	0,961
	AIC	-2017,98	-1159,97	-1745,43	-1508,39

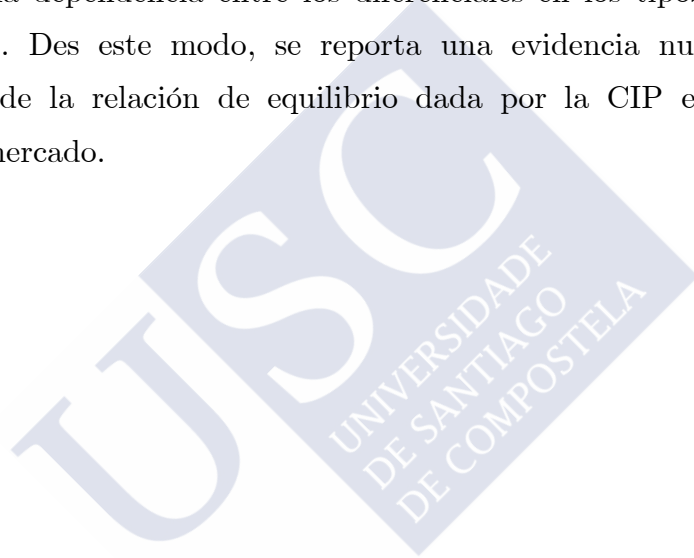
Notas. Los parámetros estimados para cópulas de valor extremo son reportados. Los errores estándar están entre paréntesis. λ es la medida de la dependencia de cola. A es la función de dependencia. Las estimaciones para las medidas de concordancia entre las variables aleatorias: la tau de Kendall (tau) y rho de Spearman (rho) se muestran. En negrita es el valor mínimo AIC que indica el mejor ajuste cópula. El número de observaciones para cada par fue de 649.

6.5 Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado la CIP considerando la dependencia entre los diferenciales de los tipos de interés y los tipos de cambio a plazo en las colas de sus respectivas distribuciones. Para ello, se ha utilizado la teoría del valor extremo para caracterizar la función de distribución de las diferencias de tipos

de interés y tipos de cambio a plazo por medio de la distribución GVE. Asimismo, se han considerado las cópulas de valores extremos con el fin de caracterizar la dependencia extrema entre los diferenciales de tasas de interés y el premio a plazo. Si la CIP se mantiene, la dependencia de la cola debe ser alta, tanto en las colas superior e inferior, de lo contrario existirían oportunidades de arbitraje que se pueden explotar cuando los mercados experimentan movimientos extremos.

Nuestros resultados empíricos para el dólar americano y la libra esterlina y las tasas de interés para ambas monedas mostraron que la CIP es válida para diferentes plazos de 1, 3, 6 y 12 meses, y que no hay ningún comportamiento asimétrico en la dependencia entre los diferenciales en los tipos de interés y la prima forward. Des este modo, se reporta una evidencia nueva a favor del cumplimiento de la relación de equilibrio dada por la CIP en circunstancias extremas del mercado.



Bibliografia

- Abbott, P.C., Borot de Battisti, A., (2009): Recent Global Food Price Shocks: Causes, Consequences and Lessons for African Governments and Donors, AERC Plenary Session on Global Food Price Shocks: Causes, Consequences and Policy Options in Africa, Mombasa, Kenya.
- Abbott, P.C., Hurt, C., Tyner, W.E., (2011): What's driving food prices in 2011? Farm Foundation Issue Report.
- Akaike, H., (1973): Information Theory and An Extension of the Maximum likelihood Principle. Petrov, B.N., Csaki, F., (Ed). The second International Symposium on Information Theory. Budapest: Akadémiai Kiado.
- Akaike, H., (1977): On Entropy Maximization Principle. Krishnaia, P.R., (Ed.). Applications of Statistics. Holland: North-Holland. Publishing Co.
- Akram, Q.F. Rime, D., Sarno, L. (2008): Arbitrage in the foreign Exchange Market: Turning on the Microscope. *Journal of International Economics* 76, 237-253.
- Akram, F.Q., (2009): Commodity prices, interest rates and the dollar. *Energy Economics* 31, 838-851.
- Akram, F.Q., Rime, D., Sarno, L., (2009): Does the Law of One Price hold in international financial markets? Evidence from tick data. *Journal of Banking and Finance* 33, 1741-1754.
- Alberola, E., Chevallier, J., Cheze, B., (2008): Price drivers and structural breaks in European carbon prices 2005–2007. *Energy Policy* 36 (2): 787-797.
- Andersen, T.G., Bollerslev, T., Diebold, F.X., Labys, P., (2001): The distribution of realized exchange rate volatility. *Journal of American Statistical Association* 96, 42-55.
- Andrew D.R., (1952): Safety First and the Holding of Assets. University of Cambridge. Department of Applied Economics. Vol (66): 1-19.
- Andrews, D.W.K., (1993): Test for parameter instability and structural change with unknown change point. *Econometrica* 61, 821-856.

- Andrews, D.W.K., Ploberger, W., (1994): Optimal test when a nuisance parameter is present only under the alternative. *Econometrica* 62, 1383-1414.
- Ané, T., Kharoubi, C., (2003): Dependence Structure and Risk Measure. *The Journal of Business* 76, 411-438.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., (1999): Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9(3), 203-228.
- Baba, N., Packer, F., (2009): Interpreting deviations from Covered Interest Parity during the financial market turmoil of 2007–2008. *Journal of Banking and Finance* 33, 1953-1962.
- Baek, J., Koo, W.W., (2010): Analyzing factors affecting U.S. food price inflation. *Canadian Journal of Agricultural Economics* 58, 303-320.
- Balkema, A., de Haan, L., (1974): Residual life time at great age. *Annals of Probability* 2, 792-804.
- Balke, N.S., Wohar, M.E., (1998): Nonlinear dynamics and covered interest rate parity. *Empirical Economics* 23, 535-539.
- Barbe, P., Genest, C., Ghoudi, K., Remillard, B., (1996): On Kendall' process. *Journal of Multivariate Analysis* 58, 197-229.
- Barndorff-Nielsen, O.E., Shephard, N., (2002): Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 64(2), 253-280.
- Beirlant, J., Matthys, G., (2003): Estimating the extreme value index and high quantiles with exponential regression models. *University of Leuven. Statistica Sinica* 13, 853-880.
- Benninga, S., (2000): *Financial Modeling*, 2nd ed. MIT Press.
- Benz, E., Hengelbrock, J., (2008): Liquidity and price discovery in the European CO₂ futures market an intraday analysis. *Carbon Markets Workshop, LSE*. 5 May 2009.
- Benz E, Trück S., (2006): CO₂ emission allowances trading in Europe – specifying a new class of assets. *Problems and Perspectives in Management* 4 (3): 30-40.
- Benz, E., Trück, S., (2009): Modeling the price dynamics of CO₂ emission allowances. *Energy Economics* 31, 4-15.

- Berg, D., (2010): Copula goodness-of-fit testing. In: Durante, F., Hardle, W., Jaworski, P., Rychlik, T., (ed.) *Workshop on Copula Theory and its Applications*. Springer. Dordrecht NL.
- Bessembinder, H., (1992): Systematic risk, hedging pressure, and risk premiums in futures markets. *Review of Financial Studies* 4, 637-667.
- Black, F., Sholes, M., (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-654.
- Bollerslev, T. (2008): Glossary to ARCH (GARCH). CREATES Research Paper 2008-49. Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1263250> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1263250>.
- Bredin, D., Hyde, S., Muckley, C., (2009): A Market Microstructure Analysis of the Carbon Finance Market. UCD School of Business Working Paper Series.
- Bredin, D., Muckley, C., (2011): An emerging equilibrium in the EU emissions trading scheme. *Energy Economics* 33, 353-362.
- Breymann, W., Dias, A., Embrechts, P., (2003): Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance. *Quantitative Finance* 3(1): 1-14.
- Campbell, S., (2005): A Review of Backtesting and Backtesting Procedure, Finance and Economics Discussion Series, Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington D.C.
- Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W., (2004): Copula methods in finance. Wiley Finance Series. John Wiley & Sons Ltd. Chichester.
- Chevallier, J., (2009): Carbon futures and macroeconomic risk factors: a view from the EU ETS. *Energy Economics* 31, 614-625.
- Chevallier, J., (2010a): A note on cointegrating and vector autoregressive relationships between CO2 allowances spot and futures prices. *Economics Bull.* 30, 1564-1584.
- Chevallier, J., (2010b): Modelling risk premia in CO2 allowances spot and futures prices. *Economic Modelling* 27, 717-729.
- Chevallier, J., (2012): Time-varying correlations in oil, gas and CO2 prices: an application using BEKK, CCC, and DCC-MGARCH models. *Applied Economics* 44, 4257-4274.
- Christiansen, A., Arvanitakis, A., Tangen, K., Hasselknippe, H., (2005): Price determinants in the EU emissions trading scheme. *Climate Policy* 5, 15-30.

- Christoffersen, P.F., (1998): Evaluating interval forecasts. *International Economic Review* 39, 841-862.
- Christoffersen, P.F, Diebold, F.X., (2000): How relevant is volatility forecasting for financial risk management. *Review of Economics and Statistics* 82, 1–11.
- Christoffersen, P., Pelletier, D., (2004): Backtesting Value-at-Risk: A duration-Based Approach. *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 2, No.1, 84-108.
- Clayton, D.G., (1978): A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial dependency in chronic disease incidence. *Biometrika* 65, 141-151.
- Clemen, R.T., Reilly, T., (1999): Correlations and copulas for decision and risk analysis. *Management Science* 45, 208-224.
- Clements, M.P, Taylor, N., (2003): Evaluating interval forecast of high-frequency financial data. *Journal of Applied Econometrics*, John Wiley & Sons, Ltd., Vol. 18(4): 445-456.
- Conrad, C., Rittler, D., Rotfuß, W., (2012): Modeling and explaining the dynamics of European Union Allowance prices at high-frequency. *Energy Economic* 34 (1): 316-326.
- Convery, F.J., Redmond, L., (2007): Market and price developments in the European Union Emissions Trading Scheme. *Rev. Environ. Economic Policy* 1 (1): 88-111.
- Czado, C., (2010): Pair-copula constructions. In: F. Durante, W. Hardle, P. Jaworski, T. Rychlik., (eds.) *Workshop on Copula Theory and its Applications*. Springer, Dordrecht (NL).
- Danielsson, J., de Hann, L., Peng, L., de Vries, C.G., (1997): Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail index estimation. Preprint, Erasmus University Rotterdam.
- Danielsson, J., Casper de V., Mahoney, J.M., (2000): Value-at-Risk and Extreme Returns. FMG-Discussion Paper No 273. Financial Markets Group. London School of Economics.
- Danielsson, J., de Haan, L., Peng, L., de Vries, C.G., (2001): Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail index estimation. *Journal of Multivariate Analysis* 76, 226-248.
- Daskalakis, G., Markellos, R.N., (2009): Are electricity risk premia affected by emission allowance prices? Evidence from the EEX, Nord Pool and Powernext. *Energy Policy* 37 (7): 2594-2604.

- Daskalakis, G., Psychoyios, D., Markellos, R., (2009): Modeling CO₂ emission allowance prices and derivatives: evidence from the European trading scheme. *Journal of Banking & Finance* 33, 1230-1241.
- de Roon, F.A., Nijman, T., Veld, C., (2000): Hedging pressure effects in futures markets. *Journal of Finance* 55 (3): 1437-1456.
- Deheuvels, P., (1978): Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes, 23. Publication Institute of Statistics. University Paris 23, 1-36.
- Dekkers, A.L. M., de Haan, L., (1989): A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *The Annals of Statistics* 17, 1795-1832.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R., (2009): Optimal versus naive diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy? *Review of Financial Studies* 22 (5): 1915-1953.
- Dias, A., Embrechts, P., (2010): Modeling exchange rate dependence dynamics at different time horizons. *Journal of International Money and Finance* 29, 1687-1705.
- Dickey, D.A., Fuller, W.A., (1979): Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Society* 75, 427-431.
- Diebold, F. X., Gunther, T. A., Tay, A. S., (1998): Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. *International Economic Review* 39 (4): 863-83.
- Dobric, J., Schmid, F., (2007): A goodness of Fit Test for Copulas Based on Rosenblatt's Transformation', *Computational Statistics & Data Analysis* 51, 4633-4642.
- Drees, H. y Kaufmann, E. (1998): Selecting the optimal simple fraction in univariate extreme value estimation. *Stochastic Processes Applied* 75, 149-172.
- Drees, H., de Haan, L., Resnick, S., (2000): "How to Make a Hill Plot". *The Annals of Statistics*. Vol. 28 (1): 254-274.
- Dunn, P.K., Smyth, G.K., (1996): Randomized Quantile Residuals. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 5, 236-244.

- Durante, F., Sarkoci, P., Sempì, C., (2009): Shuffles of copulas. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 352 (2): 914-921.
- Embrechts, P., Kluppelberg, C., Mikosch, T., (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Berlin. Springer.
- Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D., (2002): Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls In: *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. M.A.H. Dempster, Cambridge University Press, Cambridge, 176-223.
- Embrechts, P., Hoeing, A., Juri, A., (2003a): Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks. *Finance & Stochastics* 7(2): 145-167.
- Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A., (2003b): Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management In: *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, ed. S. Rachev, Elsevier, Chapter 8, 329-384.
- Embrechts, P. (2006): Discussion of: "Copulas: tales and facts" by T. Mikosch [Extremes 9, (1), 3-20]. *Extremes* 9 (1): 45-47.
- Embrechts, P., (2009): Copulas: A personal view. *Journal of Risk and Insurance* 76 (3): 639-650.
- Embrechts, P., Puccetti, G., (2010): Risk Aggregation. *Copula Theory and its Applications*, P. Jaworski, F. Durante, W. Haerdle, and T. Rychlik (Eds.) *Lecture Notes in Statistics - Proceedings* 198, Springer Berlin/Heidelberg, 111-126.
- Engle, R.F., (1982): Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometric Society Stable*. Vol.50, (4): 987-1006.
- Engle, R.F., Manganelli, S., (2004): CAViaR: Conditional Autoregressive Value-at Risk by Regression Quantiles. *Journal of Business and Economic Statistics* 22, 367-381.
- Erb, C., Harvey, C., (2006): The strategic and tactical value of commodity futures. *Financial Analysts Journal* 62 (2): 69-97.
- Farmer J.D., Geanakoplos, J., (2004): *Power laws in finance and their implications for economic theory*. Yale University.

- Feng ZH, Wei YM., Wang K, (2012): Estimating risk for the carbon market via extreme value theory: An empirical analysis of the EU ETS. *Applied Energy* 99, 97-108.
- Fermanian, J.-D., Radulovic, D., Wegkamp, M.H., (2004): Weak convergence of empirical copula processes. *Bernoulli* 10, 847-860.
- Fermanian, J.-D., (2005): Goodness of fit tests for copulas. *Journal Multivariate Anal* 95, 119-152.
- Fisher, R., Tippet, L., (1928): Limiting Forms of Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 24, 180-190.
- Fong, W.M., Valente, G., Fung, J.K.W., (2010): Covered interest arbitrage profits: The role of liquidity and credit risk. *Journal of Banking and Finance* 34, 1098-1107.
- Frenkel, J.A., Levich, R.M., (1977): Transaction Costs and Interest Arbitrage: Tranquil versus Turbulent Periods. *The Journal of Political Economy* 85(6), 1209-1226.
- Frey, R., McNeil A.J., (2003): Dependent defaults in models of portfolio credit risk. *Journal of Risk* 6(1): 59-92.
- Genberg, H., Hui, C.-H., Wong, A., Chung, T.-K., (2009): The link between FX swaps and currency strength during the credit crisis of 2007–2008. *Hong Kong Monetary Authority Research Note* 01/2009.
- Genest, C., MacKay, R.J., (1986): The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals. *The American Statistician* 40, 280-283.
- Genest, C., Rivest, L.-P., (1993): Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association* 88, 1034-1043.
- Genest, C., Ghoudi, K., Rivest, L.-P., (1995): A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika* 82, 543-552.
- Genest, C., Quessy, J.-F., Remillard, B., (2006): Goodness-of-fit procedures for copula models based on the integral probability transformation. *Scandinavian Journal of Statistics* 33, 337-366.

- Genest, C., Rémillard, B., Beaudoin, D., (2009): Goodness-of-fit tests for copulas: A review and a power study. *Insurance: Mathematics and Economics* 44(2): 199-213.
- Gilbert, C., (1989): The impact of exchange rate changes and developing country debt on commodity prices. *Economic Journal* 99, 773-784.
- Gilbert, C.L., (2010): How to understand high food prices. *Journal of Agricultural Economics* 61, 398-425.
- Glosten, L.R., Jaganathan, R., Runkle, D., (1993): On the relation between the expected value and the volatility of the normal excess return on stocks. *Journal of Finance* 48, 1779-1801.
- Gohin, A., Chantret, F., (2010): The long-run impact of energy prices on world agricultural markets: the role of macro-economic linkages. *Energy Policy* 38, 333-339.
- Gorton, G., Rouwenhorst, G., (2006): Facts and fantasies about commodity futures. *Financial Analysts Journal* 62 (2): 47-68.
- Haas, M., (2001): *New Methods in Backtesting*, Financial Engineering. Research Center Caesar, Bonn.
- Hall P., (1990): Using the bootstrap to estimate mean squared error and select smoothing parameter in nonparametric problems. *Journal of Multivariate Analysis*. Vol. 32, (2): 177-203.
- Hamerle, A., Rosch, D., (2005): Misspecified copulas in credit risk models: How good is Gaussian?. *Journal of Risk* 8, 41-58.
- Hansen, B.E., (1997): Approximate asymptotic p values for structural-change tests. *Journal of Business and Economic Statistics* 15, 60-67.
- Harri, A., Nalley, L., Hudson, D., (2009): The relationship between oil, exchange rates, and commodity prices. *Journal of Agricultural and Applied Economics* 41, 501-510.
- Heady, D., (2011): Rethinking the global food crisis: The role of trade shocks. *Food Policy* 36, 136-146.
- Hill, B.M., (1975): A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *Annals of Statistics* 5, 1163-1174.

- Hintermann, B., (2010): Allowance price drivers in the first phase of the EU ETS. *Journal of Environmental Economics and Management* 59, 43-56.
- Hoeffding, W., (1940): Masstabinvariante korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin* 5, 179-233.
- Hoeffding, W., (1947): On the distribution of the rank correlation coefficient τ when the variates are not independent. *Biometrika* 34, 183-196.
- Hoeffding, W., (1948): A class of statistics with asymptotically normal distribution. *Annals of Mathematical Statistics* 19, 293-325.
- Hofert, M., (2010): Construction and sampling of nested Archimedean copulas. In: F. Durante, W. Hardle, P. Jaworski, T. Rychlik, (eds.) *Workshop on Copula Theory and its Applications*. Springer, Dordrecht (NL).
- Huard, D., Évin, G., y Favre, A.C., (2006): Bayesian Copula Selection. *Computational Statistics and Data Analysis* 51, 809-822.
- Hull, J.C., (2011): *Fundamentals of Futures and Options Markets*. Prentice Hall, 7th edition.
- Jenkinson, A.F., (1955): The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 81, 158-171.
- Joe, H., Xu, J.J., (1996): The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models. Technical Report No. 166. Department of Statistics, University of British Columbia.
- Joe, H., (1997): *Multivariate models and dependence concepts*, Monographs on Statistics and Applied Probability, vol. 73. Chapman & Hall, London.
- Joe, H., (2005): Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. *Journal of Multivariate Analysis* 94, 401-419.
- Jorion, P., (1997): *Valor en Riesgo*. Universidad de California, Irvine. McGraw-Hill.
- Jorion, P. (2007): *Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk*. 3rd ed. New York: McGraw Hill.
- J.P., Morgan, (1995): *RiskMetrics Technical Document*. Morgan Guaranty Trust Company. Market Risk Research. 3rd ed. New York.

- Kanen, J.L.M., (2006): Carbon Trading and Pricing. Environmental Finance Publications.
- Kendall, M.G., (1938): A new measure of rank correlation. *Biometrika* 30, 81-93.
- Kibzun, A., Kuznetsov, E., (2006): Analysis of Criteria VaR and CVaR, *Journal of Banking and Finance* 30, 779-796.
- Kim, G., Silvapulle, M.J., Silvapulle, P., (2007): Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas. *Communications in Statistics Simulation and Computation* 51, 2836-2850.
- Knight, F.H., (1921): Risk, uncertainty and profit. University of Chicago Press.
- Kroner, K.F., Ng, V.K., (1998): Modeling asymmetric movements of asset prices. *Review of Financial Studies* 11, 844-871.
- Kruskal, W.H., (1958): Ordinal Measures of Association. *Journal of the American Statistical Association* 53(284): 814-861.
- Kupiec, P., (1995): Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *Journal of Derivatives* 3, 73-84.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., Shin, Y., (1992): Testing the null hypothesis of stationary against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics* 54, 159-178.
- Kwon, D., Koo, W.W., (2009): Price transmission channels of energy and exchange rate on food sector: a disaggregated approach based on stage of process. The Agricultural & Applied Economics Association 2009 AAEA & ACCI Joint Annual Meeting, Milwaukee, Wisconsin, 26-29.
- Leibler, R. A., Kullback, S., (1951): On Information and Sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics* 22, 79-86.
- Lintner, J., (1965): The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*. Vol 47, 13-37.
- Lombardi, M., Osbat, C., Schnatz, B., (2010): Global commodity cycles and linkages: a FAVAR approach. European Central Bank Working Paper 1170.
- López, J.A., (1999): Methods for evaluating Value-at-Risk estimates. Federal Reserve Bank of San Francisco. *Economic Review* 2, 3-17.

- Mancini Griffoli, T., Ranaldo, A., (2009): Deviations from Covered Interest Parity during the crisis: A story of funding liquidity constraint. Working Paper, Swiss National Bank.
- Mansanet-Bataller, M., Pardo, A., Valor, E., (2007): CO₂ prices, energy and weather. *Energy Journal* 28, 73-92.
- Marimoutou, V., Raggad, B., Trabelsi, A., (2009): Extreme Value Theory and Value at Risk: Application to oil market. *Energy Economic* 31, 519-530.
- Markowitz, H.M., (1952): Portfolio Selection. *Journal of Finance* 7, 77-91.
- Markowitz, H.M., (1959): Portfolio Selection: efficient diversification of investments, 1a.ed. New York, EE.UU: Wiley.
- Marshall, B.R., Treepongkaruma, S., Young, M., (2008): What level of compensation is available to arbitrageurs in the foreign exchange market. Working paper, Massey University and Australian National University.
- Matthys, G., Beirlant, J. (2002): Adaptative threshold selection in tail index estimation. Embrechts (Ed.).Risk Books, London. 37-49.
- McAndrews, J., Sarkar, A., (2009): Credit risk, liquidity risk and the Federal Reserve's response to the crisis. Working paper, Federal Reserve Bank of New York.
- McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P., (2005): Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press.
- McNeil, A.J., Neslehova, J., (2009): Multivariate Archimedean copulas, d-monotone functions and l_1 -norm symmetric distributions. *Annals of Statistics*. 37 (5B): 3059-3097.
- Milunovich, G., Joyeux, R., (2010): Market efficiency and price discovery in the EU carbon futures. *Applied Financial Economic* 20, 803-809.
- Mitchell, D., (2008): A note on rising food prices. World Bank Policy Research Working Paper Series no.4682. Available at SSRN: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1233058.
- Mohammadi, H., Su, L., (2010): International evidence on crude oil price dynamics: applications of ARIMA-GARCH models. *Energy Economic* 32 (5): 1001-1008.

- Mossin, J., (1966): Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica* 34, 768-783.
- Nazlioglu, S., Soytaş, U., (2012): Oil price, agricultural commodity prices, and the dollar: A panel cointegration and causality analysis. *Energy Economics* 34, 1098-1104.
- Nelsen, R.B., (1999): An introduction to copulas, *Lecture Notes in Statistics*. Vol. 139. Springer-Verlag, New York.
- Nelsen, R.B., (2001): Kendall tau metric, in Hazewinkel, Michael. *Encyclopedia of Mathematics*. Springer.
- Nelsen, R.B., (2006): An introduction to copulas. *Springer Series in Statistics*. 2nd ed. Springer-Verlag. New York.
- Nelsen, R.B., Quesada-Molina, J.J., Rodríguez-Lallena, J.A., Ubeda-Flores, M., (2008): On the construction of copulas and quasi-copulas with given diagonal sections. *Insurance Mathematical Economics* 42 (2): 473-483.
- Oberndorfer, U., (2009): EU emission allowances and the stock market: evidence from the electricity industry. *Journal Ecological Economic* 68 (4): 1116-1126.
- Paolella, M.S., Taschini, L., (2008): An econometric analysis of emission trading allowances. *Journal of Banking & Finance* 32, 2022-2032.
- Patton, A.J., (2000): Impacts of Trades in an Error-Correction Model of Quote Prices. University of California at San Diego. *Economics Working Paper Series qt6dm6093f*. Department of Economics. UC San Diego.
- Patton, A.J., (2006): Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence. *International Economic Review* 47(2): 527-556.
- Patton, A.J., (2009): Copula-based models for financial time series. In: T.G. Andersen, R.A. Davis, J.P. Kreiss, T. Mikosch (eds.) *Handbook of Financial Time Series*. Springer Verlag, 767-785.
- Peel, D.A., Taylor, M.P., (2002): Covered interest rate parity arbitrage in the interwar period and the Keynes-Einzig conjecture. *Journal of Money, Credit and Banking* 34, 52-85.
- Phillips, P.C.B., Perron, P., (1988): Testing for a unit root in time series regressions. *Biometric* 75, 335-346.

- Pickands J., (1975): Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of Statistics* 3 (1): 119-131.
- Pinho, C., Madaleno, M., (2011): CO₂ emission allowances and other fuel markets interaction. *Environ Economic Policy Studies* 13, 259-281.
- Reboredo, J.C., (2011): How do crude oil prices co-move? A copula approach. *Energy Economics* 33, 948-955.
- Reboredo, J.C., (2012a): Do food and oil prices co-move? *Energy Policy* 49, 456-467.
- Reboredo, J.C., (2012b): Modelling oil price and exchange rate co-movements. *Journal of Policy Modeling* 34 (3): 419-440.
- Reboredo, J.C., (2013): Modelling EU allowances and oil market interdependence. Implications for portfolio management. *Energy Economics* 36, 471-480.
- Reboredo, J.C., Matías, J.M., García-Rubio, R., (2012): Nonlinearity in forecasting of high frequency stock returns. *Computation Economic* 40 (3): 245-264.
- Redmond, L., Convery, F.J. (2006): Determining the Price of Carbon in the EU ETS, Planning and Environmental Policy Research Series (PEP) Working Paper 06/09, School of Geography, Planning and Environmental Policy, University College Dublin.
- Reiss, R.D., Thomas, M., (2001): Statistical Analysis of Extreme Values: with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields. Birkhäuser Verlag, 2^a ed. Basel, Switzerland.
- Rittler, D., (2012): Price discovery and volatility spillovers in the European Union emissions trading scheme: a high-frequency analysis. *Journal of Banking & Finance* 36 (3): 774-785.
- Rockafellar, R.T., Uryasev, S., (2001): Conditional Value at Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking and Finance* 26, 1443-1471.
- Rodriguez, J.C., (2007): Measuring financial contagion: A copula approach. *Journal of Empirical Finance* 14, 401-423.
- Rosenblatt, M., (1952): Remarks on a multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics* 23, 470-472.

- Sarma, M. S., Thomas, S., Shah, A. (2003): Selection of Value-at-Risk models. *Journal of Forecasting* 22, 337-358.
- Scarsini, M., (1984): On Measures of Concordance. *Stochastica* 8, 201-218.
- Schweizer, B., Wolff, E.F., (1981): On Nonparametric Measures of Dependence for Random Variables. *Annals of Statistics*. Vol. 9(4): 879-885.
- Schweizer, B., (2007): Introduction to copulas. *Journal of Hydrologic Engineering* 12 (4): 346-346.
- Senauer, B., (2008): Food market effects of a global shift toward bioenergy. *American Journal of Agricultural Economics* 90, 1226-1232.
- Sharpe, W.F., (1964): Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance* 19 (3): 425-442.
- Shih, J.H., Louis, T.A., (1995): Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data. *Biometrics* 51, 1384-1399.
- Sklar, A., (1959): Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges, *Publications Institute de Statistique de L. Université de Paris* 8, 229-231.
- Sklar, A., (1973): Random variables, joint distribution functions, and copulas. *Kybernetika (Prague)* 9, 449-460.
- Spearman, C., (1904): The proof and measurement of association between two things. *American Journal of Psychology* 15, 72-101.
- Spencer, J., (2009): Deviations from covered interest parity during the credit crisis. Leonard N. Stern School of Business. Glucksman Institute for Research in Securities Markets.
- Stephens, M.A., (1974): EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons, *Journal of the American Statistical Association*. Vol.69. (347): 730-737.
- Tang, K., Xiong, W., (2010a): The financialisation of commodities. *Vox EU*.vNovember 30. [<http://www.voxeu.org/article/financialisation-commodities>].
- Tang, K., Xiong, W., (2010b): Index Investment and Financialization of Commodities. NBER Working Paper No. 16385.
- Taylor, M. P. (1989): Covered Interest Arbitrage and Market Turbulence. *The Economic Journal* 99, 376-391.

- Timmer, C.P., (2010): Reflections on food crises past. *Food Policy* 35, 1-11.
- Tobin, J., (1958): Liquidity preference as behavior toward risk. *Review of Economic Studies* 25, 65-86.
- Treynor, J., (1961): Toward a Theory of the Market Value of Risky Assets.
- Tsay, R.S., (2010): *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons.
- Tsukahara, H., (2005): Semiparametric estimation in copula models. *The Canadian Journal of Statistics* 33, 357-375.
- Uhrig-Homburg, M., Wagner, M., (2009): Futures price dynamics of CO₂ emission allowances: an empirical analysis of the trial period. *Journal of Derivatives*. 17, 73-88.
- Vansteenkiste, I., (2009): How important are common factors in driving non-fuel commodity prices? A dynamic factor analysis. European Central Bank Working Paper 1072.
- Veith, S., Werner, J.R., Zimmermann, J., (2009): Capital market response to emission rights returns: evidence from the European power sector. *Energy Economic* 31 (4): 605-613.
- Von Mises, R., (1936): La distribution de la plus grande de n valeurs. Reprinted in *Selected Papers Volumen II*. American Mathematical Society, Providence, R.I.,USA (1954): 271-294.
- Wang, W., Wells, M., (2000): Model selection and semiparametric inference for bivariate failure-time data. *Journal of the American Statistical Association* 95, 62-76.
- Williams, J.B., (1938): *The Theory of Investment value*, Harvard University Press.
- Yanagimoto, T., Okamoto, M., (1969): Partial orderings of permutations and monotonicity of a rank Correlation Statistic. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 21, 489-506.
- Zakoian, J.M., (1994): Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economics Dynamics and Control* 18, 931-944.
- Zhang, Y.J., Wei, Y.M., (2010): An overview of current research on EU ETS: evidence from its operating mechanism and economic effect. *Applied Energy* 87, 1804-1814.